



**На правах рукописи**

**Четырбоцкий Александр Наумович**

**КРУПНОМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ  
ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ**

**25.00.28.- океанология**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени**

**доктора физико-математических наук**

**Владивосток**

**2007**

Работа выполнена в Дальневосточном геологическом институте  
ДВО РАН, г. Владивосток

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
Константин Валентинович Кошель

доктор физико-математических наук,  
Борис Евгеньевич Ламаш

доктор физико-математических наук,  
Шевченко Георгий Владимирович

Ведущая организация: Арктический и антарктический научно-  
исследовательский институт, г. Санкт-Петербург

Защита состоится 26 октября 2007 года в 14 часов на заседании  
Диссертационного совета Д 005.017.02 при Тихоокеанском океанологическом  
институте им. В.И. Ильичёва ДВО РАН  
по адресу: 690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тихоокеанского  
океанологического института им. В.И. Ильичёва ДВО РАН

Автореферат разослан

«    » августа 2007 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета  
кандидат географических наук



Ф.Ф. Храпченков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность проблемы.** Ледяной покров (ЛП) Японского моря является звеном цепочки климатообразующих факторов Дальнего Востока. Ее функциональная структура содержит элементы петли обратной связи: с одной стороны, состояние ЛП определяется состояниями атмосферы и гидросферы, а с другой – непосредственно сам ЛП моря оказывает существенное влияние на региональное формирование климата и погоды, термическую структуру вод, пространственно-временное распределение течений и состояния других гидрометеорологических процессов. В качестве физической прослойки между водой и воздухом, вследствие высоких изоляционных свойств и высокого альбедо льда, ЛП ограничивает выхолаживание подстилающих его морских вод. В этой ситуации сохраняется их теплозапас (температура глубинных слоев воды может даже повышаться из-за притока в них донных теплых вод), который участвует в ограничении роста площади ЛП. И если феноменологическая картина годового цикла эволюции ЛП представляется вполне ясной и достаточно понятной, то соответствующие математические модели имеют определенный фрагментарный характер описания последовательности ее отдельных стадий. Так, для представления стадий формирования, зрелого состояния ЛП и его разрушения обычно используются не согласованные между собой различные типы моделей.

Разработка подобных моделей обычно выполнялась для изучения дрейфа морского льда. Решению же вопросов параметризации начальной и конечной стадий эволюции морского ЛП, его таяния не уделяется должного внимания, и, как правило, оно отсутствует. Такая же ситуация отмечается и для представления эволюции припая в прибрежных районах моря. Не изучены процессы дробления ЛП, когда из исходной льдины образуется некоторое число ее прямых «потомков». При этом отсутствует количественное представление процессов торошения льдов в прибрежных районах моря. Следует особо отметить отсутствие методик параметрической идентификации существующих моделей и оценки их адекватности.

Актуальность решения указанных проблем для ЛП Японского моря обусловлена потребностями составления научно обоснованного прогноза его состояний. Подобные прогнозы требуются для обеспечения безопасности жизнедеятельности населения в прибрежных районах моря и безопасности мореплавания, комплекса работ по освоению выявленных на шельфе моря месторождений нефти и газа, промысловых работ освоения биоресурсов, развития и эксплуатации транспортных коммуникаций, гидротехнического строительства и т.д. Значительный интерес к исследованию ЛП Японского моря вытекает из особенностей его физико-географического положения: из дальневосточных морей оно является относительно закрытым, что обуславливает плавный характер эволюции его покрова. Поэтому ЛП может служить удобным природным полигоном для разработок комплексных

математических моделей взаимодействия в системе атмосфера – ледяной покров – океан и оценки их адекватности.

**Целью работы** является выявление статистических закономерностей ледового режима Японского моря, построение моделей пространственно-временной динамики его ЛП, разработка методик их параметрической идентификации и соответствующего программного обеспечения.

Для реализации поставленной цели решались следующие задачи:

- выявление статистических особенностей выборочных состояний ЛП Японского моря;
- выявление статистических особенностей термического и ветрового режимов надледных слоев воздуха;
- разработка и исследование моделей термической динамики толщины, площади и массы морских льдин;
- разработка и исследование кинетических моделей формирования и таяния морского льда;
- разработка и исследование крупномасштабных моделей пространственно-временной динамики морского ЛП;
- разработка методик параметрической идентификации предлагаемых моделей и оценки их адекватности;
- разработка программного обеспечения для решения указанных задач.

**Исходные материалы** для выполнения исследований представлены: выборочными распределениями среднедекадных характеристик ЛП в отдельных районах акватории Японского моря за период 1961–1989 гг. (материал предоставил проф. В.В. Плотников); выборочными распределениями температуры и скорости ветра надледных слоев воздуха в этих районах за период 1960–2001 гг. (материал предоставил проф. В.П. Тунеголовец). Измерения суточных температур и скоростей ветра были выполнены на стандартных в подобных исследованиях горизонтах воздуха: для температуры им является 2-метровый горизонт, а для скоростей ветра – 10-метровый горизонт.

**Методы исследований** основаны на комплексном подходе к изучению природных объектов, основу которого составляют использование совокупности методов многомерного анализа данных, математическое моделирование и применение методов многоэкстремальной минимизации.

**Научная новизна исследований** состоит в следующем:

- выявлено статистически значимое совпадение температур на 2-метровом горизонте надледного слоя воздуха в момент первичного появления образований льда на акватории Японского моря и в момент их начального таяния;
- выявлен факт того, что состояние припая ЛП Японского моря определяет состояние ЛП в открытой части моря и наоборот;
- разработаны и исследованы модели термической динамики толщины, площади и массы ЛП, где учитываются ограничивающие их рост

динамические факторы и формирование в толще ЛП на стадии его таяния талых вод;

- разработана и исследована кинетическая модель формирования и таяния масс морских льдин, где учитываются дрейф и термическая динамика масс льдин, появление и выбывание льдин, переходы льдин открытого моря во льды припая при формировании ЛП и обратные переходы при его таянии, агрегация льдин и их дробление;
- выполнено построение и исследование крупномасштабной модели пространственно-временной динамики масс льда;
- разработана и исследована кинетическая модель формирования и таяния площадей и толщин морских льдин, где учитываются дрейф, термическая динамика площадей и толщин льдин, появление и выбывание льдин, переходы льдин открытого моря во льды припая при формировании ЛП и обратные переходы при его таянии, торошение льда, агрегация и дробление льдин;
- выполнены построение и исследование крупномасштабной модели формирования и таяния площадей и толщин ЛП Японского моря.

**Обоснованность и достоверность результатов** подтверждаются следующим:

- использованием статистически представительных выборок натуральных наблюдений;
- статистической достоверностью формулируемых положений, на основании которых выполняется построение моделей;
- исследованием моделей и соответствием полученных теоретических результатов натурным экспериментальным данным;
- высокой степенью адекватности моделей натурным наблюдениям.

**Практическая значимость исследований** состоит в разработке методики параметрической идентификации крупномасштабной модели пространственно-временной динамики ЛП, которая была апробирована при построении крупномасштабной модели пространственно-временной динамики ЛП Японского моря; создании прогностического аппарата для оценки состояния его ЛП в случае, когда на акватории районов заданы температурный и ветровой режимы надледного слоя воздуха. Результаты прогноза могут быть использованы для оперативного построения прогноза состояний ЛП моря в отдельных его районах, в частности, службами МЧС для оценки выносимых весной в открытое море фрагментов припая.

**На защиту выносятся следующие основные результаты работы:**

- модели термической динамики толщины, массы и площади льдин;
- кинетические модели формирования и таяния масс льдин;
- кинетическая модель формирования и таяния площадей и толщин льдин;
- крупномасштабная модель пространственно-временной динамики масс и крупномасштабная модель пространственно-временной динамики площадей и толщин морского ЛП;

- методики параметрической идентификации моделей и оценки их адекватности.

**Апробация работы.** Основные положения работы докладывались и представлялись на конференциях и симпозиумах: «The International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)» (Pusan, 1996); «International Association for Mathematical Geology (IAMG)» (Берлин, 2002; Портсмут, 2003); «Химия: Фундаментальные и прикладные исследования, образование» (Хабаровск, 2002); «The ACSYS Decade and Beyond» (Санкт - Петербург, 2003); «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, 2006).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 29 работ, в том числе 2 монографии.

**Личный вклад автора** в работы, выполненные в соавторстве, состоял в постановке задач, выборе методов их решения, участие в анализе полученных результатов.

Автор выражает благодарность всем своим соавторам, особо признателен – проф. В.В. Плотникову и проф. В.П. Туноголовцу за предоставленные архивные данные и полезные замечания.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Она содержит 259 страниц текста, 25 рисунков 3 таблицы и список литературы из 190 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** на основании проведенного обзора литературных источников формулируется цель исследования, обосновывается актуальность выбранной темы и приводится спектр задач, рассмотренных в работе. Отмечается вклад в развитие математического моделирования динамики ЛП таких ученых, как И.Л. Аппель, З.М. Гудкович, Ю.П. Доронин, Д.А. Дрогайцев, Г.К. Зубакин, Н.И. Масловский, А.В. Марченко, Е.Г. Никифоров, С.Н. Овисенко, Л.А. Тимохов, Д.Е. Хейсин, В.В. Шулейкин, В.И. Чупрынин, W. Hibler, P. Parmeter, A. Thorndike и др.

В **первой** главе выполнено представление параметров состояния ЛП, рассмотрены основные подходы, которые используются при построении математических моделей их термической и пространственно-временной динамики.

Термическая динамика толщины  $h$  определяется разностью потоков тепла к его верхней и нижней поверхностям. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$\rho\lambda\dot{h}_{\Phi} = q_I - q_{WI}, \quad (1)$$

где  $\rho, \lambda$  – соответственно плотность льда и его скрытая теплота плавления;  $\dot{h} \equiv dh/dt$ ;  $q_I$  – поток тепла через единичную площадку нижней поверхности ЛП к единичной площадке его верхней поверхности;  $q_{WI}$  – поток тепла из воды к единичной площадке нижней поверхности. Поскольку в ЛП замерзающих морей отсутствуют заметные механические изменения  $h$ , то нижний индекс у  $\dot{h}$  опускается. Далее рассмотрены свойства тех решений (1), в которых

используются принятые в практике изучения морского ЛП аппроксимации членов правой части, например решение соответствующей задачи Стефана. Тогда условие постоянства температуры фронта продвижения льда (условие определяет постановку задачи) и  $h(t) \sim t^{1/2}$  (свойство решения) ограничивает применение полученных соотношений:  $h(t)$  на стадии формирования ЛП с течением времени монотонно возрастает, что не соответствует реальности ее изменения в мелких водоемах (они могут полностью промерзнуть). Основным недостатком этих подходов является отсутствие учета изменения свойств вмещающей лед морской среды. Термические изменения площадей и масс ЛП обычно не рассматриваются. Как правило, формально отмечают только наличие таких изменений без указания их конкретного параметрического механизма.

Для параметризации пространственно-временной динамики сплоченности  $S$  Е.Г. Никифоров на основании положений Д.А. Дрогайцева использовал уравнение неразрывности, где отсутствуют так называемые источники и стоки. W. Hibler предложил модель динамики, где используются уравнения неразрывности для  $S$  и массы толстого льда (его толщина полагается большей 0,5 м). А.Thorndike с соавторами разработали расширенный вариант указанной схемы, где структура ЛП определяется функцией плотности распределения его толщин. Ее пространственно-временное изменение определяется балансовым соотношением, где учитываются: массовый дрейф льда, термическая динамика  $h$ , появление площадей тонкого льда, переход льда от одной его толщины к другой в результате сплава и торошения. Полагается также независимость скорости термического роста  $h$  от термической истории льда. В рамках используемого Л.А. Тимоховым подхода ЛП представляет собой статистическую систему образований льда различной массы в пространстве координат и скоростей. Уравнения модели следуют кинетическим уравнениям для функции распределения льдин по координатам, их скоростям и массам.

Анализ подходов и соответствующих моделей показывает их ограниченную область применимости в тех случаях, где имеет место сезонное присутствие льда. В частности, члены термического воздействия обычно опускаются. Подобный подход приемлем для исследования ЛП морей Арктического бассейна, где влиянием таких процессов можно пренебречь. Допустимость подобного допущения для ЛП Японского моря возможна только для стадии его зрелого состояния. Поэтому его формирование и разрушение находятся вне области применимости подобного подхода. В указанных моделях также отсутствует рассмотрение льдов припая. Важность изучения их динамики особенно актуальна, поскольку весной при таянии и взломе припая происходит вынос его отдельных фрагментов в открытое море с находящимися на них многочисленными рыбаками. И здесь имеют место проблемы спасения жизни людей. Адаптация рассмотренных подходов для конкретных объектов сопряжена с рядом методических проблем реализации. Так, не указаны методики параметрической идентификации указанных моделей.

Во **второй** главе рассмотрены способы количественного представления динамики морского ЛП, указаны физико-географические характеристики Японского моря и приведен обзор исследований его ЛП. Далее выполнен

статистический анализ состояний ЛП моря, которые здесь представлены совокупностью выборок среднедекадных распределений сплоченности  $S$ , толщин  $h$  и преобладающего размера льдин  $F$  в отдельных районах моря за период 1961–1989 гг. Рассмотрены вопросы восстановления пропущенных значений и оцифровка выраженных в баллах значений этих характеристик ЛП.

Исследования ЛП Японского моря ориентированы, как правило, на определение ледовых фаз и ледовитости  $L$  отдельных крупных районов моря. В работах Я.А. Тютнева, Е.И. Алдошиной, А.И. Каракаша и Г.А. Столяровой изучается ледовитость северных районов моря. Л.П. Якунин собрал и систематизировал данные о характере ледового режима моря. Им выполнено построение атласов сезонных распределений показателей ледового режима. В.В. Плотников проанализировал распределение среднедекадных ледовитостей моря и провел систематизацию характеристик ЛП в тех районах акватории, где отмечаются достаточно однородные ледовые условия (рис. 1). Критерием их выделения являлась однородность ледовых условий односвязных участков моря. Им было выделено 114 таких районов, для чего акватория моря была покрыта прямоугольной сеткой с размерами ячейки  $60 \times 58$  км. Особенностью большинства подобных исследований является факт отсутствия рассмотрения состояний ЛП моря как единого объекта, который представлен совокупностью распределений характеристик ЛП в отдельных районах моря.

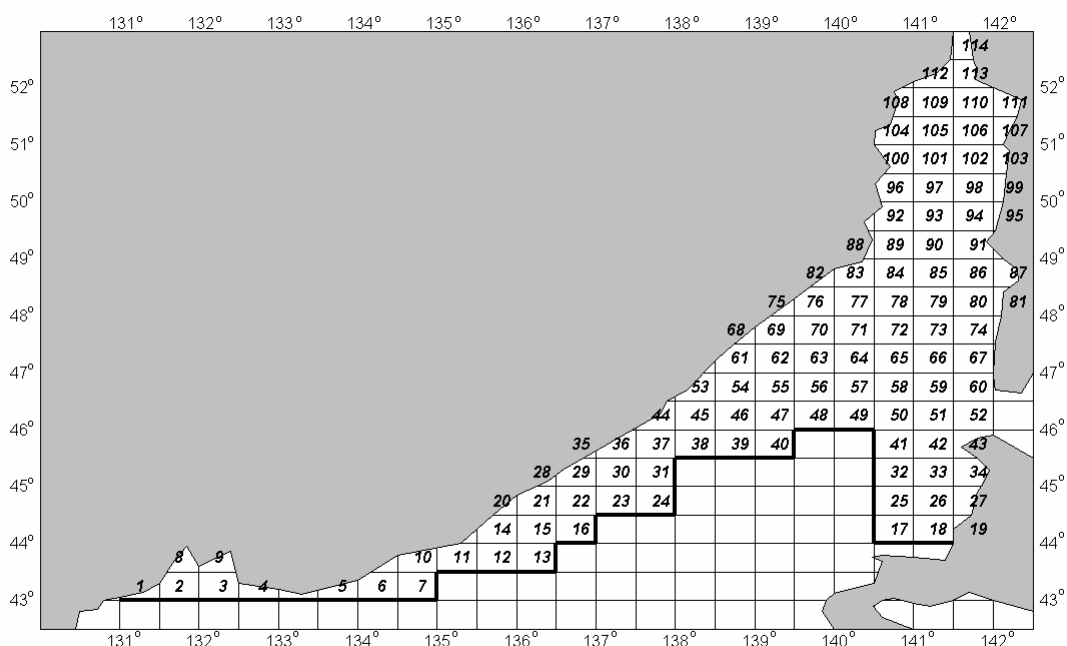


Рис.1. Расположение и нумерация районов акватории Японского моря, где за период с 1961–1989 гг. отмечается присутствие льда

Согласно анализу выборочных данных предельная продолжительность цикла эволюции ЛП моря оказалась равной 22 декадам, что далее и принимается за период этого цикла. Число районов моря здесь полагается равным 166 (52 района моря являются прибрежными). Анализ выборочных распределений показывает их статистическую представительность и факт отсутствия статистически значимых трендов их междугодовых вариаций. Для выявления



состояний ЛП использовались методы иерархической классификации и многомерного шкалирования. Целесообразность их применения обусловлена следующим: при их использовании выборочное состояние ЛП всего моря рассматривается как отдельное комплексное наблюдение, которое задается соответствующим набором выборочных распределений его характеристик. Такие наблюдения формируются на основании исходной выборки. Так при анализе декадных состояний ЛП моря каждое из 22 наблюдений насчитывает: 4814 элементов ( $166 \cdot 29$ ) при учете только одной характеристики ( $S, h$  или  $F$ ); 9628 элементов ( $166 \cdot 29 \cdot 2$ ) при учете пары характеристик; 14442 элемента ( $166 \cdot 29 \cdot 3$ ) при учете всех трех характеристик. При анализе междугодовых состояний ЛП каждое из 29 наблюдений (продолжительность периода наблюдений) насчитывает  $166 \cdot 22 \cdot k$  элементов, где  $k=1-3$ . На рис. 2 представлены результаты иерархической классификации и конфигурация образов точек многомерного пространства на плоскости первых двух агрегированных показателей (для наглядности образы смежных точек соединены отрезками). Мерой близости является евклидова метрика. При расчетах учитывались различия диапазонов изменения  $S, h$  и  $F$ : здесь изменение каждого из них приведено к отрезку  $[0, 1]$ .

Расположение ветвей на рис. 2а указывает на наличие двух стадий динамики  $S$ : одна из них (31–8 декаду следующего года) характеризует стадию формирования и зрелого состояния ЛП, а другая (9–16 декады) – его таяния. Отмечается совпадение начальной и конечной стадий эволюции. Распределение образов точек на плоскости  $\{Y_1^{(S)}, Y_2^{(S)}\}$  (рис. 2б) в большей мере отражает их исходное распределение: кофенетический коэффициент корреляции в первом случае  $c^{(S)}(a)=0,858$ , во втором –  $c^{(S)}(б)=0,950$ . Состояния ЛП для декад со 2-й по 8-ю близки между собой. Интерпретация  $Y_1^{(S)}$  и  $Y_2^{(S)}$  состоит в следующем: рост  $Y_1^{(S)}$  характеризует убывание  $S$ , а  $Y_2^{(S)}$  – рост ее изменчивости. Наличие самопересечений указывает на тот факт, что изменения  $S$  на стадии таяния может быть выполнено в терминах изменений  $S$  на стадии ее формирования.

Расположение ветвей на рис. 2в указывает на наличие 3-х стадий динамики  $h$ : формирование (31–36 декады), зрелого состояния (1–10 декады) и таяния (11–16 декады). И это следует конфигурации образов точек на плоскости  $\{Y_1^{(h)}, Y_2^{(h)}\}$  (рост  $Y_1^{(h)}$  соответствует убыванию  $h$ , а  $Y_2^{(h)}$  – ее изменчивости). Отмечается отсутствие самопересечений, что указывает на специфику изменения  $h$  для каждой стадии эволюции ЛП. Случай  $г$  в большей степени соответствует реальной конфигурации выборочных точек:  $c^{(h)}(в)=0,893$  и  $c^{(h)}(г)=0,936$ . Расположение ветвей на рис. 2д (рассматривается совместное распределение  $S$  и  $h$ ) подобно расположению в предыдущем случае. Однако здесь в большей степени проявляется сезонность динамики ЛП. Различие между состояниями начальных и конечных декад обусловлено тем, что при одинаковых объемах льдины последних декад имеют меньшие площади. Поэтому толшины льдин последних декад цикла эволюции превышают толшины льдин начальных декад. Адекватность выявленных фактов реальной ситуации следует из анализа значений коэффициентов  $c_1^{(S,h)}(д)=0,827$  и

$c_2^{(S,h)}(e)=0,943$ . Анализ совместных распределений всего набора  $\{S,h,F\}$  показывает их идентичность совместным распределениям  $S$  и  $h$ . Поэтому пространственно-временное изменение ЛП однозначным образом определяется в терминах его площадей и толщин.

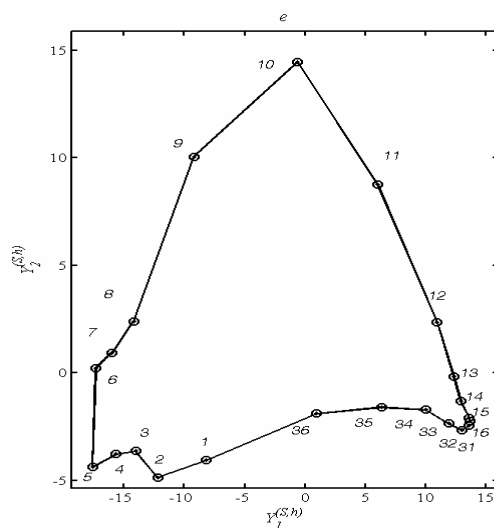
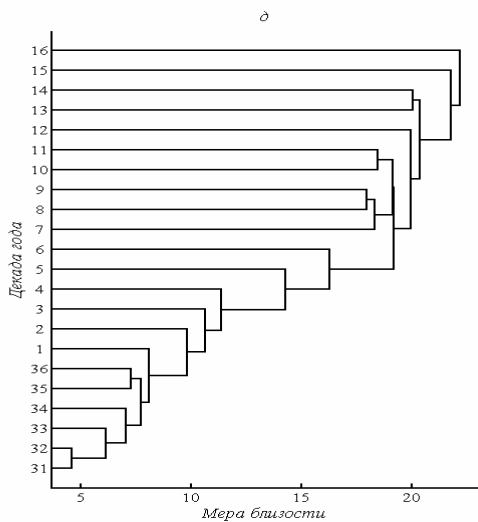
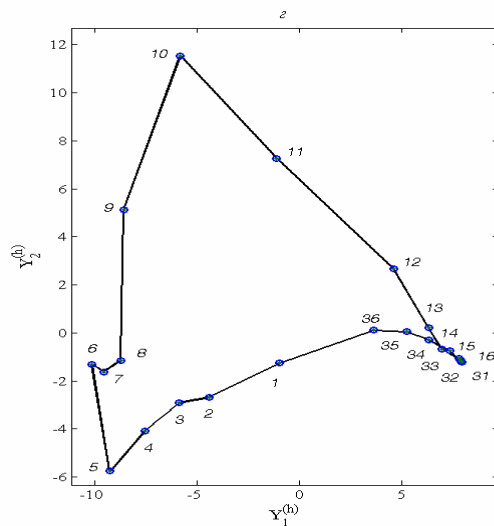
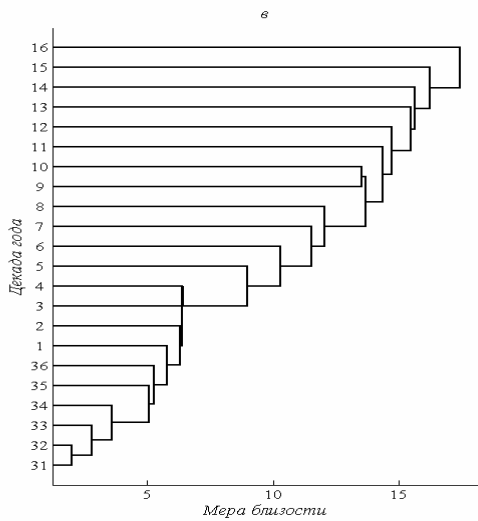
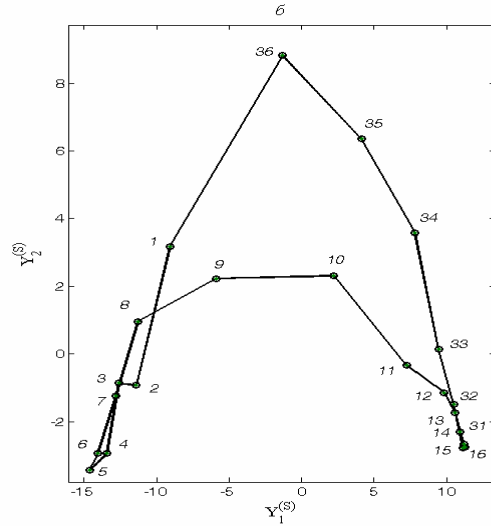
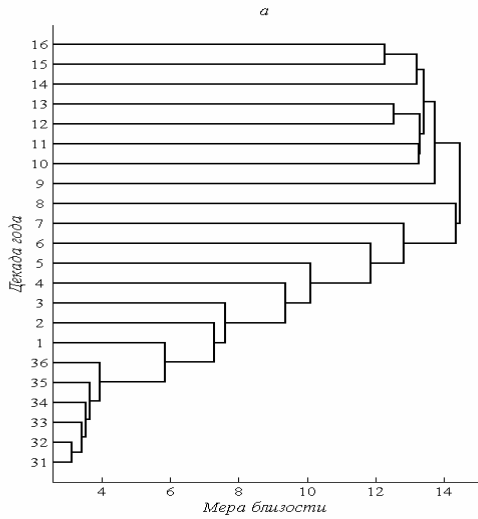


Рис. 2. Результаты иерархической классификации (а, в, д) и распределение состояний ЛП Японского моря (б,г,е) на плоскости первых двух агрегированных показателей

В практике изучения морского ЛП для оценки его междугодовой изменчивости обычно используются распределения ледовитости моря (Л.П. Якунин, Г.К. Зубакин, В.В. Плотников и др.). Вне рамок такого анализа остаются распределения других характеристик морского ЛП. Выполненный в работе анализ междугодовой изменчивости распределений отдельных характеристик и их совместных распределений показывает отсутствие статистически значимых трендов.

Анализ распределений усредненных за многолетний период оцифрованных значений  $S, h$  и  $\ln F$  (значение  $F$  существенно выше  $S$  и  $h$ , поэтому для их сопоставимости вместо  $F$  используется значение его логарифма) показывает следующее. Распределение  $\{\bar{S}_{dr}\}$  ( $d, r$  – номера декады и района;  $d_0(r) \leq d \leq d_1(r)$ , где  $d_0(r), d_1(r)$  – начальная и конечная декады присутствия льда в  $r$  районе;  $1 \leq r \leq 166$ ) следует U-образному распределению. Первая мода характеризует ЛП низких  $S$  (осеннее формирование и весеннее разрушение покрова), а вторая соответствует покрову тех районов акватории, где льдом занято от 0.6 и более площади района моря. Распределение  $\{\bar{h}_{dr}\}$  следует бимодальному распределению, где первая мода характеризует ЛП осеннего и зимнего этапов, а вторая мода – ЛП зрелого состояния и ЛП начала весеннего этапа. Распределение  $\{\ln \bar{F}_{dr}\}$  подобно распределению  $\{\bar{S}_{dr}\}$ : коэффициент корреляции между ними равен 0,946. Особенности совместных изменений пар характеристик ЛП моря были выявлены при рассмотрении соответствующих парных графиков (рис. 3).

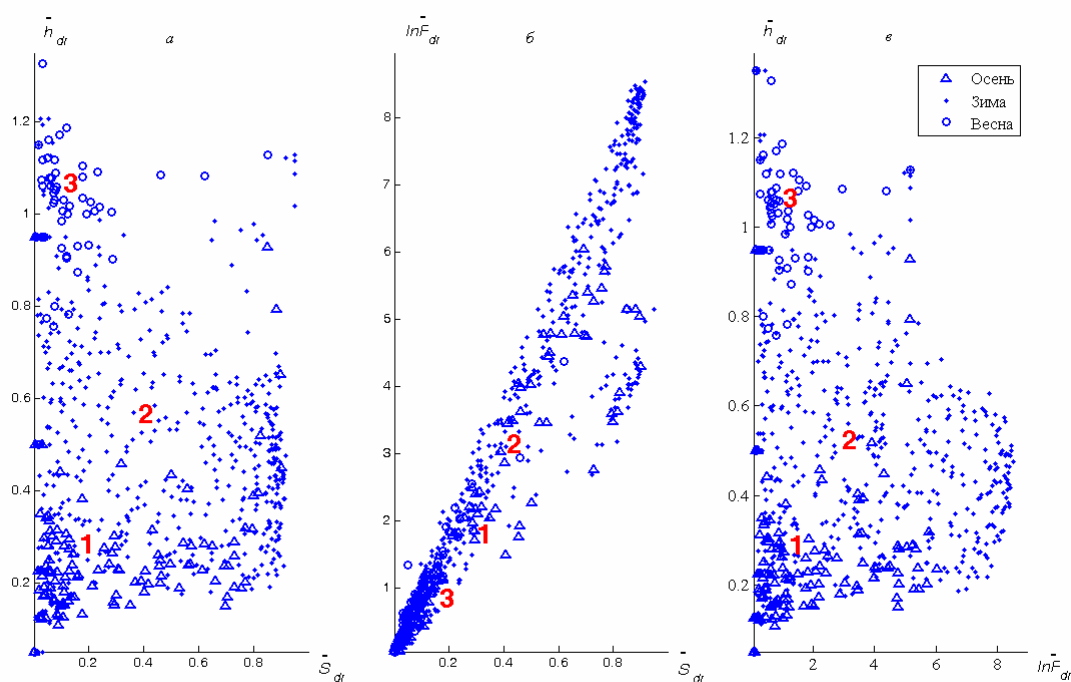


Рис. 3. Выборочные распределения усредненных по годам среднедекадных характеристик  $S_{dr}, h_{dr}$  и  $\ln F_{dr}$  ЛП (положения средних значений в отдельных этапах помечены соответствующими цифрами)

Конфигурация выборочных точек в случаях (а) и (в) указывает на отсутствие значимых корреляций между  $\{\bar{S}_{dr}\}$  и  $\{\bar{h}_{dr}\}$ , а также между  $\{\ln \bar{F}_{dr}\}$  и  $\{\bar{h}_{dr}\}$ . Отмечается широкий разброс  $\bar{S}_{dr}$  для тонкого льда  $0 < \bar{h}_{dr} < 0,5$ , что может быть обусловлено наличием точки перегиба кривой толщины. Действительно, при понижении температуры на акватории сначала формируется тонкая пленка льда. И только затем следует заметный рост толщины образований льда. Случай (б) указывает на взаимнооднозначное соответствие  $\bar{S}_{dr}$  и представленных в логарифмическом масштабе значений  $\bar{F}_{dr}$  (коэффициент корреляции равен 0,946). Поэтому можно допустить, что в рамках принятой пространственной дискретности на образование торосов при агрегации отдельных льдин расходуется их незначительные площади. Действительно, если бы имело место обратное утверждение, то оно относилось бы и к преобладающему размеру льдин. А это не соответствует реальной ситуации.

Далее рассмотрены выборочные распределения характеристик ЛП в отдельных районах моря и на всей его акватории.

Анализ распределений температур  $T$  на 2-метровом горизонте слоя воздуха в момент первичного появления образований льда на акватории моря и в момент начального таяния показал их статистически значимое совпадение.

В **третьей** главе выполнена разработка моделей термической динамики характеристик (толщины, площади и массы) отдельных образований морского льда, модели пространственно-временной динамики массы и модели распределения толщин морского ЛП.

При построении модели термической динамики  $h$  полагается, что разность  $q_l - q_{wl}$  в (1) определяется температурой воздуха  $T$ , текущим  $h$ , наибольшей для ЛП моря толщиной  $H^*$  (в мелководных водоемах она равна его глубине, в других случаях – предельное значение за многолетний период), толщиной снега  $h_s$  и набором некоторых факторов  $B = (B_1, B_2, \dots, B_l)$ . На стадии формирования ЛП, когда  $h$  мало,  $q_l - q_{wl} > 0$ . Когда  $h = 0$  или же весь ресурс  $H^* - h$  льда уже «израсходован», то  $q_l = q_{wl}$ . Тогда согласно принятым в системе «ресурс–потребитель» положениям, аппроксимацию  $\dot{h}$  можно записать в виде

$$\dot{h} = f_h(T, h_s, B)(H^* - h)h,$$

где  $f_h(T, h_s, B)$  – соотнесенное к единице доступного ресурса морского льда относительное изменение  $h$  за единицу времени. При заданных динамических факторах внешней среды (толщина снега, альbedo поверхности снега и т. д.) аппроксимацией  $f_h$  может служить, например, их линейная функция. Для оценки ее коэффициентов требуются достаточно подробные многолетние ряды наблюдений. В практике же исследований ЛП Японского моря эти ряды содержат достаточно подробные цифровые сведения о распределениях  $h$ . Наблюдения же остальных динамических факторов имеют, как правило,

фрагментарный характер. Поэтому в работе рассматривается случай, когда  $\dot{h}$  определяется  $T$  при фиксированных значениях остальных динамических факторов. Если принимается допущение о совпадении температур воздуха при начальном формировании ЛП и при его начальном таянии (обозначим ее  $T^*$ ), то  $\dot{h}$  можно записать в виде

$$\dot{h}(t, T^*) = (T^* - T)[\alpha_h^{(A)}\Theta(T^* - T) + \alpha_h^{(S)}\Theta(T - T^*)](H^* - h)h, \quad (2)$$

где  $\Theta(z)$  – функция Хевисайда, а  $\alpha_h^{(A)}, \alpha_h^{(S)}$  – коэффициенты. Для удобства записей принимаем, что нижний индекс указывает на характеристику ЛП ( $h, a, m$ ), а верхний индекс – на стадию цикла эволюции (стадия формирования –  $A$  (*Autumn*); стадия таяния –  $S$  (*Spring*)). Целесообразность такого разделения (механизм динамики ЛП тогда определяется двумя наборами параметров) обусловлена неполнотой числового представления реального ледового режима: обычно отсутствуют выборочные распределения альбедо морской воды и снега, облачности и т. д.

Решение (2) при  $-\dot{T}(T^* - T)^{-2} < (2 - \alpha_h^{(A)})H^*$  имеет точку перегиба. То есть существует определенный «инкубационный» период  $t_c$  в течение которого понижение  $T$  приводит к формированию тонкого льда. Его наличие обусловлено следующим: на предварительной стадии цикла эволюции образуются отдельные скопления зародышей льда; происходит их агрегация и слипание; акватория района покрывается тонкой пленкой льда, толщина которой практически не изменяется; далее следует ускоренный рост толщины льда до ее предельного значения. Нарушение неравенства имеет место при высоком темпе понижения температуры воздуха, что обуславливает скачкообразный рост  $h(t, T)$ .

Для параметризации динамики талой воды в толще ЛП примем допущения. Пусть  $h_w$  – суммарная толщина распределенных в толще ЛП участков талой воды. Ее первичный верхний слой образуется в результате таяния снега, а затем верхнего слоя самого льда. Представляется естественным, что  $\dot{h}_w$  пропорционален толщине снега  $h_s, h_w$  (чем больше слой талой воды, тем больше при таянии льда в нем накапливается тепла и, следовательно, интенсивнее идет рост  $h_w$ ) и толщине льда  $h$ . Учитывается также просачивание талых вод через пористую среду толщи ЛП (их сток). Поскольку при таянии с ростом  $T$  возрастает и пористость льда, то интенсивность стока талых вод определяется  $T$ . В простейшем случае можно допустить пропорциональность  $\dot{h}_w$  текущим значениям соответствующих переменных (толщин снега, льда и талой воды). Достоверность положения о пропорциональности следует из простых рассуждений: чем больше толщина надледного снега, тем больше из него образуется талой воды; чем больше  $h$ , тем больше при таянии продуцируется талой воды; чем больше  $h$ , тем менее интенсивен сток (просачивание) талой воды сквозь толщу льда. Согласно принятому нами допущению о зависимости интенсивности нарастания и таяния ЛП от разности температур  $T - T^*$  динамика  $h_w$  определяется записью

$$\dot{h}_w = (T - T^*)[\alpha_{hs}h_s + \alpha_{hw}h + \alpha_w h_w - \beta_w h_w]\Theta(T - T^*),$$

где  $\alpha_{hs}, \alpha_{hw}, \alpha_w, \beta_w$  – неотрицательные коэффициенты. Понятно, что  $\beta_w > \alpha_w$ . В ином случае при  $h_s = 0$  и  $h = 0$  имелся бы рост  $h_w$ , что не соответствует реальности. Наличие надледного слоя талой воды ускоряет таяние льда, что хорошо согласуется с известными фактами. Поскольку измерения  $h_s$  обычно имеют фрагментарный характер, то  $\alpha_{hs}$  полагается равным нулю. После переобозначений получаем такую запись модификации (2):

$$\begin{cases} \dot{h}(t, T^*) = (T^* - T)[\alpha_h^{(A)}\Theta(T^* - T) + \alpha_{hh}^{(S)}\Theta(T - T^*)][(H^* - h)h + \alpha_{wh}h_w] \\ \dot{h}_w(t, T^*) = (T - T^*)(\alpha_{hw}h - \beta_w h_w)\Theta(T - T^*) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $(T^* - T)\alpha_{wh}h_w$  в правой части первого уравнения характеризует влияние более теплой, чем лед талой воды на термическую динамику  $h$  при его таянии: чем больше талой воды, тем интенсивнее следует поглощение коротковолновой солнечной радиации и, следовательно, интенсивнее следует таяние льда. При записи (3) учитывается тот факт, что низкая отражательная способность морской воды и большая по сравнению со снежно-ледяным покровом ее прозрачность способствуют проникновению тепла под дно снежниц, повышая тем самым таяние ЛП снизу. В начальный момент таяния  $h_w = 0$ .

Модель термической динамики площади отдельного образования льда  $a$  определяется допущениями, которые были приняты для модели  $\dot{h}$ . Ресурсом  $a$  является площадь открытой воды на акватории района  $A_w = A^* - A - A^{(F)}$ , где  $A^*$  – площадь района;  $A, A^{(F)}$  – площадь ЛП участков открытого моря и припая (для районов открытого моря  $A^{(F)} \equiv 0$ ). Для этапа таяния следует также учитывать площадь открытой воды: вследствие малой отражательной способности вода аккумулирует больше, чем ЛП, лучистой энергии. На основании принятых допущений модель для  $\dot{a}$  можно записать в виде

$$\dot{a} = [\alpha_a^{(A)}\Theta(T^* - T) + \alpha_a^{(S)}\Theta(T - T^*)](T^* - T)(A^* - A - A^{(F)})a, \quad (4)$$

где  $\alpha_a^{(A)}, \alpha_a^{(S)}$  – неотрицательные коэффициенты. Необходимо отметить, что подобные рассуждения применимы также для представления термической эволюции массы отдельной льдины

$$\begin{cases} \dot{m}(t, T^*) = (T^* - T)[\alpha_m^{(A)}\Theta(T^* - T) + \alpha_m^{(S)}\Theta(T - T^*)][(M^* - M - M^{(F)})m + \alpha_{wm}m_w] \\ \dot{m}_w(t, T^*) = (T - T^*)(\alpha_{mw}m - \beta_m m_w)\Theta(T - T^*) \end{cases} \quad (5)$$

где  $\alpha_m^{(A)}, \alpha_m^{(S)}, \alpha_{wm}, \alpha_{mw}, \beta_m$  – неотрицательные коэффициенты;  $M^*$  – предельная масса льда на акватории района, масса льда открытого моря  $M = \int_0^{M^*} mn_m dm$  и припая

$M^{(F)} = \int_0^{M^*} mn_m^{(F)} dm$ . Характер следования решения (4) и (5) подобен решению (3).

Согласно кинетическому подходу морской ЛП можно представить посредством статистического ансамбля взаимодействующих между собой отдельных льдин. Динамика плотности распределения льдин  $n_m \equiv n_m(x, t, m)$  тогда определяется соответствующим кинетическим уравнением

$$\partial n_m / \partial t + \partial(u_i n_m) / \partial x_i + \partial(\dot{m} n_m) / \partial m = f_m + b_m + Q_m + R_m, \quad (6)$$

где  $u = (u_1, u_2)$ ,  $W = (W_1, W_2)$  – скорости дрейфа льда и скорость ветра;  $x = (x_1, x_2)$  – пространственные координаты;  $\dot{m}$  следует (5);  $f_m \equiv f_m(x, t, m)$  – интенсивность появления (выбывания) льдин массы  $m$  непосредственно из морской воды (в морскую воду), минуя стадии их трансформаций из одних размеров их масс в другие размеры;  $b_m \equiv b_m(x, t, n_m)$  характеризует переход льдин открытых участков в льды припая на стадии формирования ЛП и обратные переходы на стадии его таяния ( $b_m \geq 0$  только в прибрежных районах);  $Q_m \equiv Q_m(x, t)$ ,  $R_m \equiv R_m(x, t)$  – характеризуют агрегацию льдин и их дробление. В (6) рассматривается массовый дрейф льда: анализ спутниковых снимков и непосредственные наблюдения показывают, что отклонения дрейфа отдельных льдин не превышают 5 % от их осредненного движения.

При записи  $f_m$  учитывается тот факт, что на стадии формирования ЛП динамика числа появлений льдин пропорциональна доступной для них массе морской воды, а на стадии таяния – текущей массе льда. Поэтому  $f_m$  можно записать в виде

$$f_m \equiv (T^* - T)[\alpha_{mn,n}^{(A)} \cdot (M^* - M - M^{(F)})\Theta(T^* - T) + \alpha_{mn,n}^{(S)} \cdot (M + M^{(F)})\Theta(T - T^*)]f_{mn}(m, t),$$

где  $\alpha_{mn,n}^{(A)}, \alpha_{mn,n}^{(S)}$  – неотрицательные коэффициенты;  $f_{mn}(m, t)$  – убывающая функция  $m$  (например,  $C_{mn}(t)\exp(-w_{mn}m)$ , где  $w_{mn}$  – неотрицательный коэффициент).

Функция  $b_m$  здесь определяется записью

$$b_m = (T^* - T)b_m^{(A)}(T, u)n_m \Theta(T^* - T) + (T_F^* - T)b_m^{(S)}(T, W)n_m^{(F)} \Theta(T - T_F^*), \quad (7)$$

где  $b_m^{(A)}(T, u), b_m^{(S)}(T, W)$  – неотрицательные функции;  $n_m^{(F)}$  – плотность распределения льдин припая. Понятно отличие  $T^*$  от температуры  $T_F^*$  начального его таяния. Действительно, участки прибрежного припая являются относительно неглубокими и более пресными (они опресняются речными водами и стоками промышленных предприятий). И поэтому ледообразование на открытых участках моря начинается при более низких температурах воздуха, чем на участках расположения припая. Таяние льда на открытых участках акватории моря начинается при более низких температурах – в этот период активно проявляет себя сочетание воздействия солнечной радиации и течений моря. Последующая оценка параметров подтверждает указанный факт.

Для представления агрегации льдин здесь используется запись коагуляционного члена кинетического уравнения Смолуховского

$$Q_m = \frac{1}{2} \int_0^m \beta(m - m', m') n_m(m - m') n_m(m') dm' - n_m \int_0^{M^*} \beta(m, m') n_m(m') dm', \quad (8)$$

где  $\beta(m, m')$  – так называемое ядро кинетического уравнения коагуляции. Если для представления дроблений льдин использовать ветвящиеся процессы, то

$$R_m(n_m) = \int_m^{M^*} n_m(m') \gamma_m(m', m) dm' - n_m(m) \frac{1}{m} \int_0^m m' \gamma_m(m, m') dm', \quad (9)$$

где  $\gamma_m(m, m')$  – вероятность образования льдины массы  $m'$  при распаде льдины

массы  $m > m'$ . Далее выполнено аналитическое исследование частных случаев (9), разработаны подходы для параметрического представления  $\gamma_m(m, m')$ .

Следующим выполнено исследование изменения  $n_m$ . Крупномасштабная модель динамики массы льда (порядок характерного масштаба осреднения изменяется от нескольких десятков до 100 км) получается умножением (6) на  $m$  и интегрированием полученного результата. Тогда модель динамики масс льда открытого моря  $M$  и припая  $M_F$  определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \partial M / \partial t + \partial(u_i M) / \partial x_i = (T^* - T)[g_m^{(A)}(M)\Theta(T^* - T) + g_m^{(S)}(M)\Theta(T - T^*)] + b_m^{(F)} \\ \dot{M}^{(F)} = (T_F^* - T)[g_m^{(A)}(M^{(F)})\Theta(T_F^* - T) + g_m^{(S)}(M^{(F)})\Theta(T - T_F^*)] - b_m^{(F)} \\ b_m^{(F)} = [b_m^{(A)}(T, u)M\Theta(T^* - T) + (T_F^* - T)b_m^{(S)}(T, W)M^{(F)}\Theta(T - T_F^*)] \cdot I(x_1, x_2) \end{cases}, \quad (10)$$

где  $g_m^{(A)}(\tilde{M}) = (\alpha_m^{(A)}\tilde{M} + \alpha_{mn}^{(A)})(M^* - M - M^{(F)})$  характеризует динамику масс льда на стадии формирования ЛП, а  $g_m^{(S)}(\tilde{M}) = [\alpha_m^{(S)}(M^* - M - M^{(F)}) + \alpha_{mn}^{(S)}]\tilde{M}$  – на стадии таяния ЛП. При записи (10) используется тот факт, что результаты агрегации и результаты дробления не меняют суммарной массы льда:  $\int_0^{M^*} m Q_m dm = \int_0^{M^*} m R_m dm = 0$ .

Рассмотрение пространственно-временной динамики морского ЛП в терминах пространственно-временной динамики его масс ограничено ситуацией, когда масса льдины отражает определенную стадию ее развития. Указанное свойство выполняется только для припая, а для льдин открытого моря оно не выполняется – в отдельные моменты времени среди их общего многообразия встречаются льдины одной и той же массы, но разных стадий развития (подобная ситуация наиболее типична для весенней стадии цикла эволюции). Кроме того, распределение масс льда может быть получено на основании распределения площадей ЛП по его толщинам. Понятно, что обратное не соответствует действительности. Тем не менее модель динамики масс льда оказывается полезной для изучения отдельных составляющих процессов цикла эволюции льда, в частности процессов формирования крупных образований отдельных льдин. При рассмотрении динамики ЛП в терминах его масс отсутствует возможность параметрического представления процессов торошения ЛП: при торошении определенным образом изменяются площади льдин (площади тонких льдин падают, а толстых растут). Поэтому процессы торошения допускают их параметрическое представление только тогда, когда одним из параметров состояния ЛП является площадь льдин.

Для детального представления динамики ЛП целесообразно построение таких моделей, где на основании приведенных выше логических схем рассматривается совместное изменение площадей льдин и их толщин. При построении соответствующей кинетической модели динамической переменной является плотность распределения по  $(a, h)$  числа льдин открытых участков района  $n_{ah} \equiv n_{ah}(x, t, a, h)$  и льдин припая  $n_{ah}^{(F)} \equiv n_{ah}^{(F)}(x, t, a, h)$  (для районов открытого моря  $n_{ah}^{(F)} \equiv 0$ ). В случае принятия указанных допущений динамика ЛП в открытой части акватории районов определяется балансовым соотношением

$$\partial n_{ah} / \partial t + \partial(u_i n_{ah}) / \partial x_i + \partial(\dot{a} n_{ah}) / \partial a + \partial(\dot{h} n_{ah}) / \partial h = f_{ah} + b_{ah} + \psi_{ah} + Q_{ah} + R_{ah}, \quad (11)$$



где  $\dot{h}, \dot{a}$  определяются их моделями (3) и (4);  $f_{ah} \equiv f_{ah}(x, t, a, h)$  – прирост при формировании и убыль при таянии плотности льдин площади  $a$  и толщины  $h$  непосредственно из морской воды (в морскую воду), минуя стадии их трансформаций из одних размеров их площадей и толщин в другие размеры;  $b_{ah} \equiv b_{ah}(x, t, a, h)$  – изменение  $n_{ah}$ , которое обусловлено на стадии формирования ЛП трансформацией льдин открытых участков в льды припая и обратным процессом при его весеннем таянии и разрушении ( $b_{ah} \geq 0$  только в прибрежных районах);  $\psi_{ah} \equiv \psi_{ah}(x, t, a, h)$  – характеризует изменение  $n_{ah}$  вследствие торошения льда;  $Q_{ah} \equiv Q_{ah}(x, t, a, h)$ ,  $R_{ah} \equiv R_{ah}(x, t, a, h)$  – характеризуют динамику агрегации и дробления льдин.

Для записи  $f_{ah}$  используется условие:  $I \equiv \int_0^{H^*} \int_0^{A^*} f_{ah} da dh$  при формировании ЛП

есть суммарный прирост появившихся в единицу времени льдин, а при его таянии – растаявших льдин. В первом случае полагаем пропорциональность  $I$  доступному для льда его ресурсу  $A_w(x, t) \equiv A^* - A(x, t) - A^{(F)}(x, t)$ , а во втором – площади льда. Здесь  $A(x, t) \equiv \int_0^{H^*} A_h(x, t, h) dh$ ,  $A^{(F)}(x, t) \equiv \int_0^{H^*} A_h^{(F)}(x, t, h) dh$  – площади ЛП

открытого моря и припая;  $A_h(x, t, h) \equiv \int_0^{A^*} a n_{ah}(x, t, a, h) da$ ,  $A_h^{(F)}(x, t, h) \equiv \int_0^{A^*} a n_{ah}^{(F)}(x, t, a, h) da$  –

плотности распределений толщин ЛП на открытых участках моря и припая. Интенсивность этих процессов определяется также разностью  $T^* - T$ . Полагаем запись  $f_{ah}$  в виде

$$f_{ah} = (T^* - T)[(A^* - A - A^{(F)})f_a^{(A)}(a)f_h^{(A)}(h)\Theta(T^* - T) + (A_h + A_h^{(F)})f_a^{(S)}(a)f_h^{(S)}(h)\Theta(T - T^*)], \quad (12)$$

где  $f_a^{(A)}(a)$ ,  $f_h^{(A)}(h)$ ,  $f_a^{(S)}(a)$ ,  $f_h^{(S)}(h)$  – быстро убывающие функции своих аргументов.

Параметрическое представление механизма трансформации льдов открытого моря во льды припая на стадии формирования ЛП и обратный процесс на стадии таяния припая  $b_{ah}$  здесь принимает запись

$$b_{ah}(T, a, h) = -b_a^{(A)}(T, u)n_{ah}\Theta(T^* - T) + b_a^{(S)}(T, h, W)n_{ah}^{(F)}(A^* - A - A^{(F)})\Theta(T - T_F^*)$$

$$b_a^{(A)}(T, u) = [b_a^{(A,0)} + (T^* - T)b_a^{(A,T)} + b_a^{(A,u)}n \circ u] \quad , \quad (13)$$

$$b_a^{(S)}(T, h, W) = [b_a^{(S,0)} + (T - T_F^*)b_a^{(S,T)} - b_a^{(S,h)}h - b_a^{(S,W)}n \circ W]$$

где  $b_a^{(A,0)}$ ,  $b_a^{(A,T)}$ ,  $b_a^{(A,u)}$ ,  $b_a^{(S,0)}$ ,  $b_a^{(S,T)}$ ,  $b_a^{(S,h)}$ ,  $b_a^{(S,W)}$  – неотрицательные коэффициенты;

$W = (W_1, W_2)$  – скорость ветра;  $n$  – нормаль к береговой линии;  $-b_a^{(A)}(T, u)n_{ah}$  характеризует трансформацию льдин открытых участков прибрежных районов во льды припая при формировании покрова, а  $b_a^{(S)}(T, h, W)n_{ah}^{(F)}(A^* - A - A^{(F)})$  – обратный процесс при таянии припая. В последнем выражении сомножитель  $A^* - A - A^{(F)}$  указывает на тот факт, что для разрушения припая и присоединения его фрагментов ко льдам открытых участков требуется открытая вода: чем больше открытой воды, тем выше темп этого процесса. Здесь также учитывается тот факт, что интенсивность разрушения припая есть убывающая функция его  $h$ .

При записи  $\psi_{ah}$  полагаем, что совокупность образований морского льда  $\Omega = \{(a, h) : 0 < a \leq A^*, 0 < h \leq H^*\}$  является замкнутой относительно процессов торошения системой (различного рода подсоны одних льдин под другие мы относим к процессу торошения льдин). Иными словами, результат торошения элементов из  $\Omega$  также является ее элементом. При торошении площади тонких льдов сокращаются, а толстых – увеличиваются; части льдин отдельных градаций толщин переходят в льдины их последующих градаций; суммарный объем льда сохраняется (для принятых пространственно-временных масштабов потерями объемов льда, вследствие их сжатия при контакте, можно пренебречь). Поэтому представляется естественной запись  $\psi_{ah}$  в виде

$$\psi_{ah} = -[v_1^{(A)}\Theta(T^* - T) + v_1^{(S)}\Theta(T - T^*)]\{(H^* - h)n_{ah} - \chi \int_0^{h-\Delta h} (H^* - z)A_z w_{ah}(h, z)dz\} \\ \chi = \int_0^{H^*} (H^* - h)hA_h dh / \int_0^{H^*} h \int_0^{h-\Delta h} (H^* - z)A_z w_{ah}(h, z)dz dh \quad , \quad (14)$$

где  $v_1^{(A)}, v_1^{(S)}$  – неотрицательные коэффициенты;  $\Delta h$  – заданный шаг по  $h$ ;  $w_{ah}(h, z) \geq 0$  – функция, посредством которой формулируется перераспределение вследствие торошения площадей льда толщины  $z$  в льдины толщины  $h$  ( $z < h \leq H^*$ ). При записи  $\psi_{ah}$  полагаем, что при торошении: 1) ее убывание пропорционально текущему значению  $n_{ah}$ ; 2) чем выше толщина льда, т. е. чем меньше  $H^* - h$ , тем меньше он тороится (согласно чему при торошении отсутствуют потери площадей самого толстого льда); 3) прирост  $n_{ah}$  обусловлен переходами в эту градацию площадей льда из предыдущих градаций толщин (второй член в фигурных скобках). Согласно записи для  $\chi$  при торошении суммарный объем льдов не изменяется (пренебрегаем сжимаемостью льда). Для представления  $w_{ah}(h, z)$  полагаем такую схему: при торошении льда толщины  $h$  наибольший прирост площади имеет место только для смежной с  $h$  градацией толщины, а далее приросты площадей убывают в зависимости от  $h - z$ . Тогда  $w_{ah}(h, z)$  можно представить, например, записью

$$w_{ah}(h, z) = const \cdot \exp\{-[v_2^{(A)}\Theta(T^* - T) + v_2^{(S)}\Theta(T - T^*)](h - z)\}, \quad (15)$$

где  $v_2^{(A)}, v_2^{(S)}$  – неотрицательные коэффициенты. Свойства модели (14) состоят в том, что при торошении наибольшие потери  $n_{ah}$  отмечаются для самых тонких льдин. Кроме того, если на акватории присутствуют льды только последней градации толщины  $H^*$  (толстые льды), то второй и третий члены в квадратных скобках первого соотношения обращаются в нуль и потому отсутствует торошение льда. Далее в работе рассмотрены модификации  $Q_{ah}$  и  $R_{ah}$ .

Начальное распределение полагается равным нулю. Граничные условия для (11) естественным образом следуют из (3) и (4): отсутствие соответствующих потоков на границах диапазонов изменений  $a$  и  $h$ . Для построения модели динамики ЛП следует умножить (10) на  $a$  и выполнить интегрирование полученного результата по этой переменной:

$$\begin{cases} \partial A_h / \partial t + \partial u_i A_h / \partial x_i + \partial \dot{h} A_h / \partial h = (T^* - T) f_A(A_h, T^*) + b_h + \psi_h(A_h, T^*) \\ \partial A_h^{(F)} / \partial t + \partial \dot{h} A_h^{(F)} / \partial h = (T_F^* - T) f_A(A_h^{(F)}, T_F^*) - b_h + \psi_h(A_h^{(F)}, T_F^*) \\ b_h = \{-b_a^{(A)}(T, u) A_h \Theta(T^* - T) + b_a^{(S)}(T, h, W) A_h^{(F)} A_W \Theta(T - T_F^*)\} \end{cases}, \quad (16)$$

где  $\psi_h(A_h, T_m) = -[v^{(A)} \Theta(T_m - T) + v^{(S)} \Theta(T - T_m)] [(H^* - h) A_h - \chi \int_0^{h-\Delta h} (H^* - z) A_z w_{ah}(h, z) dz]$ ;

$f_A(A, T_m) = [\alpha_a^{(A)} A + f_{Ah}(h, \beta_1^{(A)}, \beta_2^{(A)})] A^{(W)} \Theta(T_m - T) + [\alpha_a^{(S)} A^{(W)} + f_{Ah}(h, \beta_1^{(S)}, \beta_2^{(S)})] A \Theta(T - T_m)$ ;

$f_{Ah}(h, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 \exp(-\beta_2 h)$ ;  $\beta_1 = \int_{a_1}^{A^*} f_a(a, h) da$ ; функции  $b_a^{(A)}(T, u)$  и  $b_a^{(S)}(T, h, W)$

определяются соотношениями (13), а  $\chi$  – из (14);  $w_{ah}(h, z)$  – из (15). При записи  $A_h^{(F)}$  площади припая толщины  $h$  учитывается следующее. Припай можно формально представить плотностью  $n_{ah}^{(F)}(x, t, a, h)$ , где число льдин каждой градации  $a$  и  $h$  равно 0 или 1. Тогда (11) определяет также и эволюцию плотности распределения  $n_{ah}^{(F)}(x, t, a, h)$  составляющих припай льдин, если в его левой части положить равной нулю скорость дрейфа льда.

В записи  $J(h) \equiv \int_0^{A^*} a f_{ah}(a, h) da$  явным образом не указываем параметрическое представление функций  $f_a^{(A)}(a)$  и  $f_a^{(S)}(a)$ , а полагаем выполнение следующих допущений. Во-первых, быстро убывающую функцию  $f_h(h)$  в (12) представляем посредством удобной для вычислений записью  $f_{Ah}(h, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 \exp(-\beta_2 h)$ , где  $\beta_1, \beta_2$  – неотрицательные коэффициенты. Во-вторых, полагаем, что при формировании ЛП суммарная площадь появившихся льдин толщины  $h$  пропорциональна площади открытой воды, а при таянии – соответствующей этой толщине суммарной площади. Если  $\beta_1^{(A)}, \beta_2^{(A)}, \beta_1^{(S)}$  и  $\beta_2^{(S)}$  значения соответствующих коэффициентов для этих стадий, то

$$J(h) = (T^* - T) [f_{Ah}(h, \beta_1^{(A)}, \beta_2^{(A)}) A^{(W)} \Theta(T^* - T) + f_{Ah}(h, \beta_1^{(S)}, \beta_2^{(S)}) A \Theta(T - T^*)].$$

При записи системы (16) мы учитываем тот факт, что  $\int_0^{A^*} a Q_{ah} da = 0$  и  $\int_0^{A^*} a R_{ah} da = 0$ , в рамках отдельных толщин перераспределение льда (агрегация и дробление) не изменяет их общую площадь. Начальные и граничные условия для  $A_h$  и  $A_h^{(F)}$  следуют из (3) и (4):

$$A_h(x, t_0, h) = A_h^{(F)}(x, t_0, h) = 0 \text{ и } \dot{h} A_h \Big|_{h=0, H^*} = \dot{h} A_h^{(F)} \Big|_{h=0, H^*} = 0. \quad (17)$$

Из (16) следует: при постоянстве знака  $T^* - T$  система имеет одно стационарное состояние: при  $T^* - T > 0$  оно соответствует зрелому состоянию покрова (конечная стадия формирования ЛП, когда на акватории присутствует только толстый лед), а при  $T^* - T < 0$  – отсутствию на акватории льда (конечная стадия цикла эволюции ЛП).

Интегрирование (16) по  $h$  приводит к уравнению модели динамики суммарной площади ЛП на акватории района. Если весь ЛП прибрежного района составляет припай (относительно закрытые районы акватории моря) и

не учитывается торошение, то динамика его суммарной площади определяется уравнением

$$\dot{A}^{(F)} = (T_F^* - T) \{ (\alpha_a^{(A)} A^{(F)} + \alpha_A^{(A)}) (A^* - A^{(F)}) \Theta(T_F^* - T) + [\alpha_a^{(S)} (A^* - A^{(F)}) + \alpha_A^{(S)}] A^{(F)} \Theta(T - T_F^*) \},$$

где  $\alpha_A^{(A)} \approx \beta_1^{(A)} / \beta_2^{(A)}$  и  $\alpha_A^{(S)} \approx \beta_1^{(S)} / \beta_2^{(S)}$ . При записи  $\dot{A}^{(F)}$  полагаем значения величин  $\beta_2^{(A)} H^*$  и  $\beta_2^{(S)} H^*$  такими, что экспонентами с их отрицательными значениями можно пренебречь. Если припай составляет основную часть ЛП прибрежного района, то характер изменения его площади определяется температурным режимом и площадью  $A^*$  акватории

$$A^{(F)}(t) = A^{(A,F)}(t) \Theta(T_F^* - T) + A^{(S,F)}(t) \Theta(T - T_F^*)$$

$$A^{(A,F)}(t) = A^* \left\{ 1 - \frac{\alpha_A^{(A)} + \alpha_a^{(A)}}{\alpha_A^{(A)} \exp[(\alpha_a^{(A)} A^* + \alpha_A^{(A)})(T_F^* - \bar{T}^{(A)})(t - t_0^{(A)})] + \alpha_a^{(A)}} \right\}, \quad (18)$$

$$A^{(S,F)}(t) = \frac{\alpha_a^{(S)} A^* + \alpha_A^{(S)}}{\alpha_a^{(S)}} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_a^{(S)} C_A^{(S)} \exp[(\alpha_a^{(S)} A^* + \alpha_A^{(S)})(T_F^* - \bar{T}^{(S)})(t - t_0^{(S)})] + 1} \right\}$$

где  $t_0^{(A)}, t_0^{(S)}$  – моменты времени, которые соответствуют начальной стадии формирования ЛП и начальной стадии его таяния;  $\bar{T}^{(A)}(t) = \frac{1}{t - t_0^{(A)}} \int_{t_0^{(A)}}^t T dt$  и

$\bar{T}^{(S)}(t) = \frac{1}{t - t_0^{(S)}} \int_{t_0^{(S)}}^t T dt$  – средние температуры воздуха от момента начального формирования/таяния ЛП до соответствующего текущего момента времени. В первом случае  $A^{(F)}(t_0^{(A)}) = 0$ , а во втором случае  $A^{(F)}(t_0^{(S)})$  площадь припая в момент его начального таяния и  $C_A^{(S)} = A^{(F)}(t_0^{(S)}) / [\alpha_a^{(S)} A^* + \alpha_A^{(S)} - \alpha_a^{(S)} A^{(F)}(t_0^{(S)})]$ .

Анализ изменения  $A^{(A,F)}(t)$  показывает следующее. Момент времени  $t = t_A^{(A)}$  перегиба кривой  $A^{(A,F)}(t)$  определяется решением уравнения

$$-\dot{T}(t) / [T_F^* - T(t)]^2 + \alpha_a^{(A)} A^* - \alpha_A^{(A)} - 2\alpha_a^{(A)} A^{(A,F)}(t) = 0,$$

где  $t_0^{(A)} < t < t_0^{(S)}$ . В естественных для формирования припая условиях  $-\dot{T}(t) \geq 0$ . Тогда кривая площади припая имеет точку перегиба, если выполняются условия: 1)  $A^{(A,F)}(t_A^{(A)}) > 0$  или  $\alpha_A^{(A)} < \alpha_a^{(A)} A^* - \dot{T} / (T_F^* - T)^2$ ; 2)  $A^{(A,F)}(t_A^{(A)}) < A^*$  или  $-\dot{T} / (T_F^* - T)^2 < \alpha_a^{(A)} A^* + \alpha_A^{(A)}$ . Для предметной интерпретации неравенств примем, что  $-\dot{T}(t_A^{(A)}) = 0$ . Тогда перегиб кривой отсутствует, если при одной и той же температуре  $T < T_F^*$  воздуха акватория небольшого водоема быстро покрывается пленкой льда. Даже при выполнении первого неравенства кривая площади припая может не иметь точки ее перегиба: для этого должен иметь место определенный режим охлаждения воздуха (второе неравенство), например, его резкое охлаждение. На стадии таяния припая  $-\dot{T}(t) \leq 0$ . Поэтому второе неравенство выполняется при любых неотрицательных параметрах. А первое неравенство выполняется только тогда, когда имеет место определенный термический режим повышения температуры воздуха.

В настоящем случае район акватории моря определяется прямоугольной ячейкой с размерами  $50 \times 60$  км, а временной шаг равен 1 суткам, что

обусловлено дискретностью представлений выборочных распределений температуры и скорости ветра. Из наблюдений и анализа порядка членов соответствующих уравнений следует, что в этом случае скорость дрейфа ЛП (а не отдельных льдин) имеет квазистационарный характер и определяется простыми соотношениями. На рис. 4 (а, в, д) представлены рассчитанные по этой модели временные распределения толщин ЛП Амурского залива (8-й район на рис. 1) и рис.4 (б, г, е) южной части Татарского пролива (114-й район, рис.1) (рассмотрение ЛП именно этих районов обусловлено их важным положением). Анализ отдельных случаев показывает, что на стадии весеннего разрушения и таяния припая имеет место рост площадей ЛП открытых участков, что является следствием выноса сюда фрагментов льдов припая.

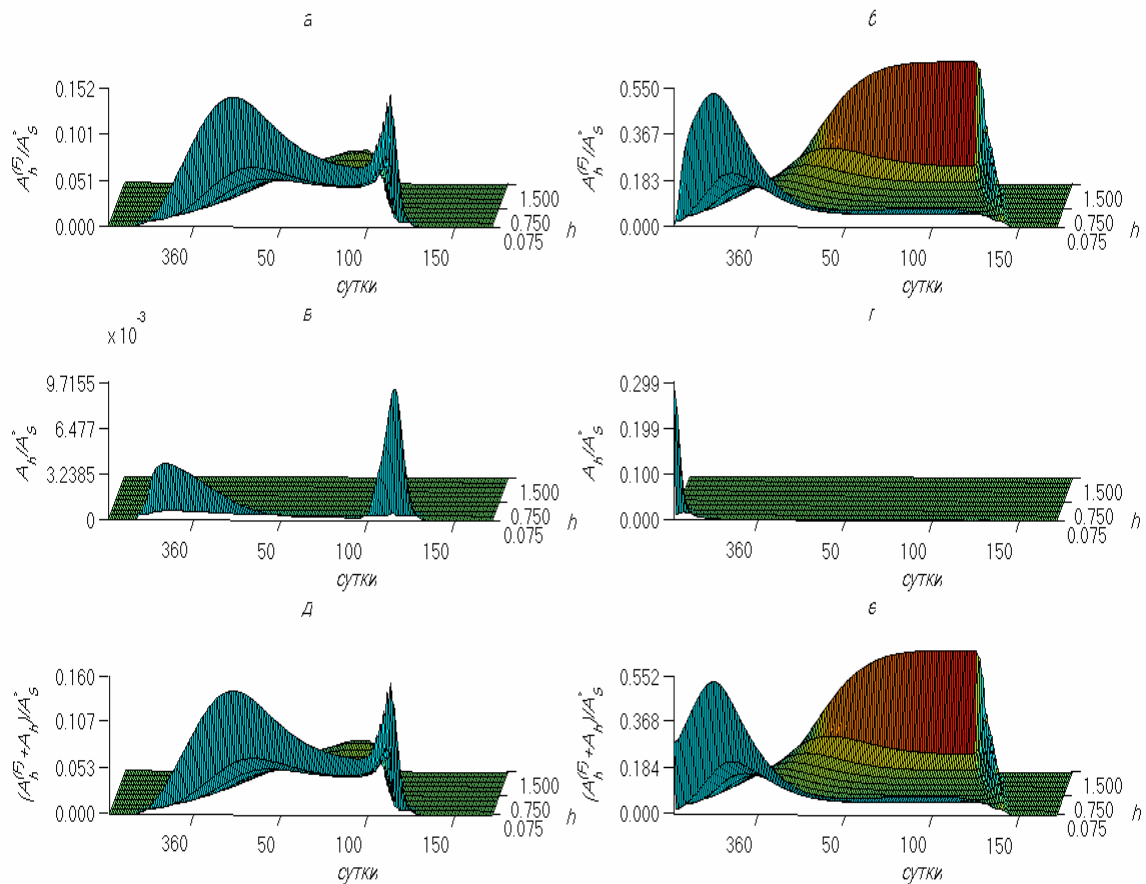


Рис.4. Выраженные в долях площади открытого района моря распределения толщин ЛП в Амурском заливе (а, в, д) и южной части Татарского пролива (б, г, е) Интересно отметить, что процесс таяния и обусловленный этим распад ЛП не является обратным процессу его формирования. Действительно, на стадии формирования сначала появляется тонкий лед (случаи на рис. 4 показывают, что его наибольшая площадь в Амурском заливе превышает 38 % площади этого района акватории, для района южной части Татарского пролива – 58 %), а затем следуют переходы площадей льда из малых градаций толщин в их старшие градации. На стадии таянии ЛП моря имеют место обратные переходы. Поскольку площадь тонкого льда первой выбывает из системы, то ее значения

на протяжении почти всей стадии таяния существенно меньше площадей остальных градаций толщин.

Трансформации льдов открытых участков во льды припая и обратные трансформации в этих районах рассмотрены с помощью распределений отдельных составляющих правых частей уравнений системы (16) (рис. 5). Сопоставление случаев рис.5а и рис.5б указывает на различия изменений припая в этих районах. Так, в первом случае термический (2-й член в  $b_a^{(A)}(T,u)$ ) и ветровой (3-й член в  $b_a^{(A)}(T,u)$ ) режимы открытых участков акватории не оказывают заметного влияния на формирование припая. На стадии таяния ЛП этого района именно тепловое воздействие обуславливает разрушение припая, свидетельством чего является превышение значений термической составляющей  $(T^* - T)b_a^{(A,T)}\Theta(T^* - T) \int_0^{H^*} A_h dh + (T - T_F^*)b_a^{(S,T)}\Theta(T_F^* - T)A^{(W)} \int_0^{H^*} A_h^{(F)} dh$  над ветровой составляющей  $b_a^{(A,u)}n \circ u\Theta(T^* - T) \int_0^{H^*} A_h dh + b_a^{(S,W)}n \circ W\Theta(T_F^* - T)A^{(W)} \int_0^{H^*} A_h^{(F)} dh$ .

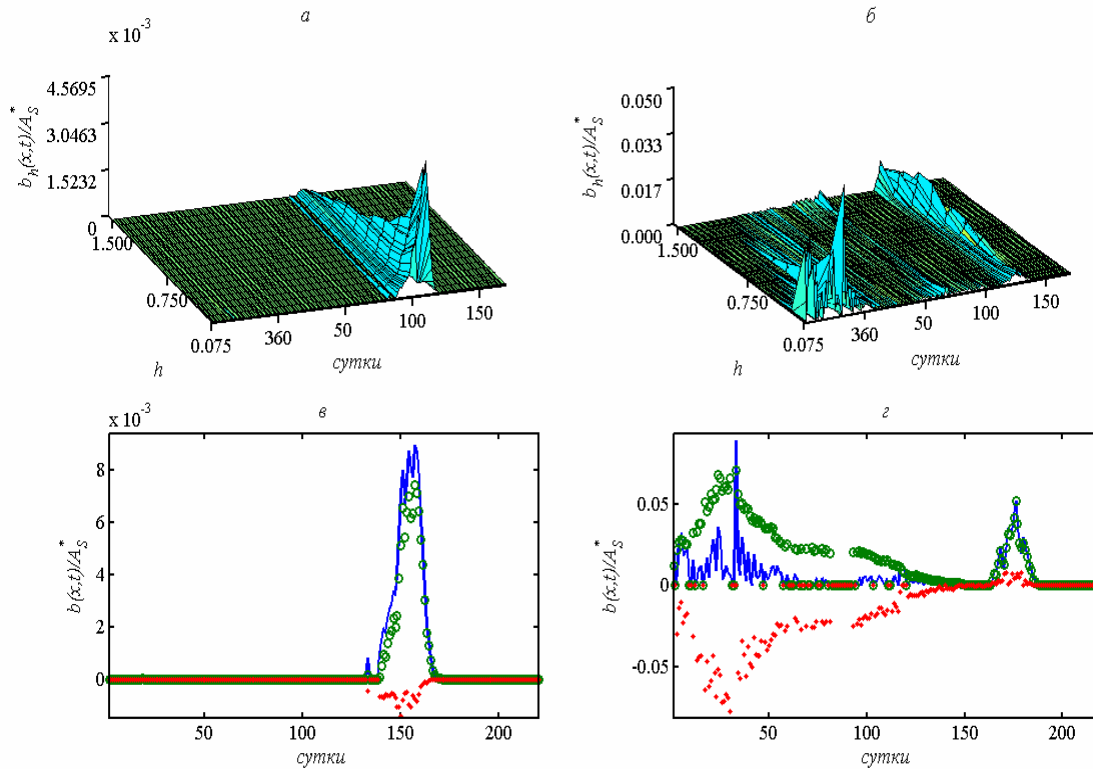


Рис. 5. Выраженные в долях площади открытого района моря распределения  $b_h(x_1, x_2, t)$  и  $b(x_1, x_2, t) = \int_{h_1}^{H^*} b_h(x_1, x_2, t) dh$  для ЛП Амурского залива (а, в) и ЛП южной части Татарского пролива (б, г) (кружками обозначены распределения для термической и точками для ветровой составляющих процесса формирования – разрушения припая в этих районах, а сплошная линия – результирующая процесса)

На стадии таяния ЛП в южной части Татарского пролива температура выполняет определяющую роль в процессе разрушения припая. Указанная

ситуация оказывается противоположной картине разрушения припая Финского залива, где согласно положениям З.М. Гудковича и С.В. Клячкина именно ветровая составляющая обуславливает взлом его припая. Однако последнее положение не является приемлемым для ЛП Японского моря. Действительно, непосредственные наблюдения показывают, что взлом припая имеет место и без отжимного ветра: в безветренный и ясный весенний день происходит обрушение передней кромки припая и его разрушение. Поэтому представляется, что механизм (13) в большей степени отражает взлом припая.

Вызванные торошением изменения в единицу времени площадей ЛП представлены на рис. 6, где для удобства интерпретации они выражены в долях площади открытого района моря.

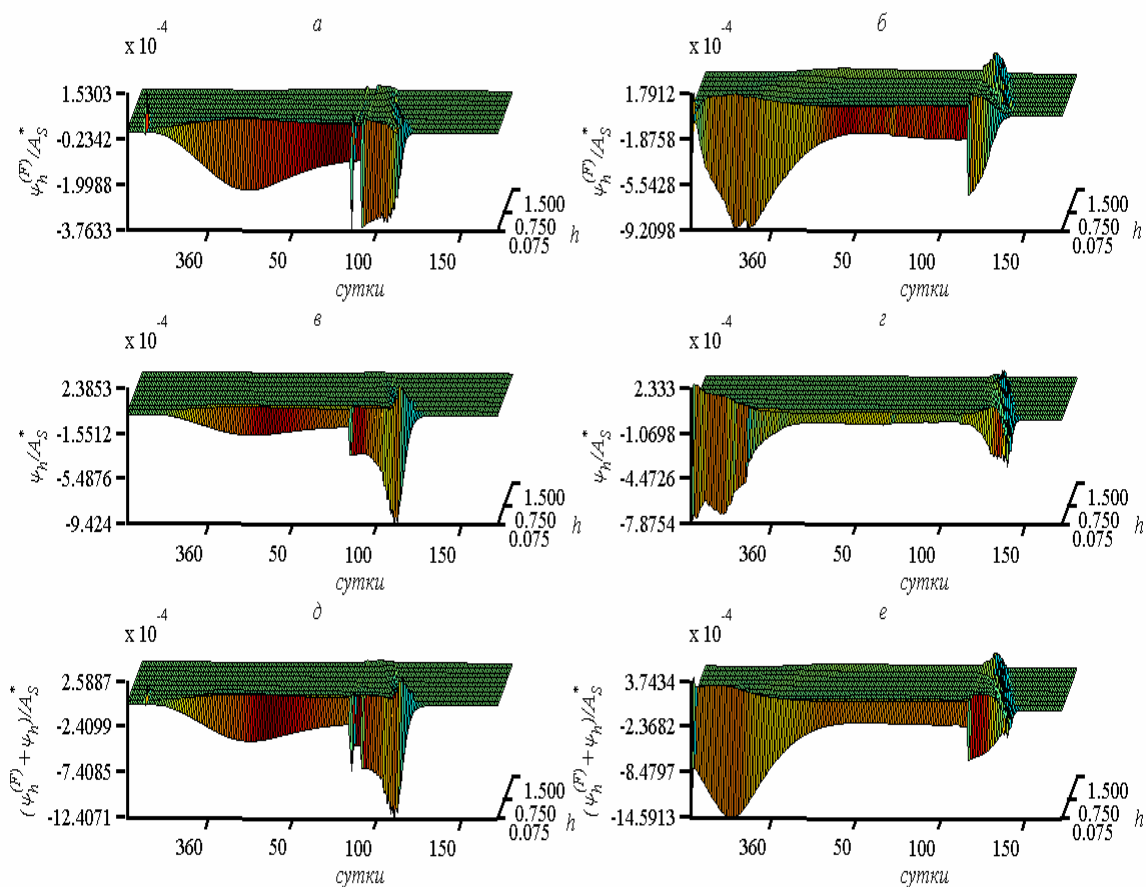


Рис. 6. Выраженные в долях площади открытого района моря распределения  $\psi_h$  для ЛП Амурского залива (а, в, д) и района южной части Татарского пролива (б, г, е)

Следуя принятым выше положениям, торошение морских льдов приводит к определенному сокращению площадей тонких льдин и соответствующему изменению площадей толстых льдин (различного рода подсовы одних льдин под другие здесь причисляются к процессам торошения). В соответствии с (14) формируется такая цепочка переходов площадей отдельных градаций толщин, что при торошении возрастает площадь самого толстого на текущий момент льда. Площади же льда предыдущих градаций этой толщины уменьшаются следующим образом: чем выше  $h$ , тем меньше при торошении сокращаются площади данной толщины. Например, если на акватории присутствуют льды

двух последовательных градаций толщины, то при торошении площадь старшей градации возрастает, а младшей – падает. Допускаются также случаи торошения льда даже тогда, когда на акватории присутствуют льды только одной градации толщины. Именно такие ситуации здесь и отмечены (рис. 6).

Усредненные по площадям образований льда различные толщин распределения суммарных толщин участков талой воды представлены на рис. 7. Анализ их распределений показывает следующее. От начального момента таяния ЛП проистекает определенный промежуток времени, прежде чем образуется заметный слой талой воды. Далее на поверхности ЛП имеет место ее накопление. Затем она просачивается сквозь толщу льда и поэтому убывает с верхней поверхности льда.

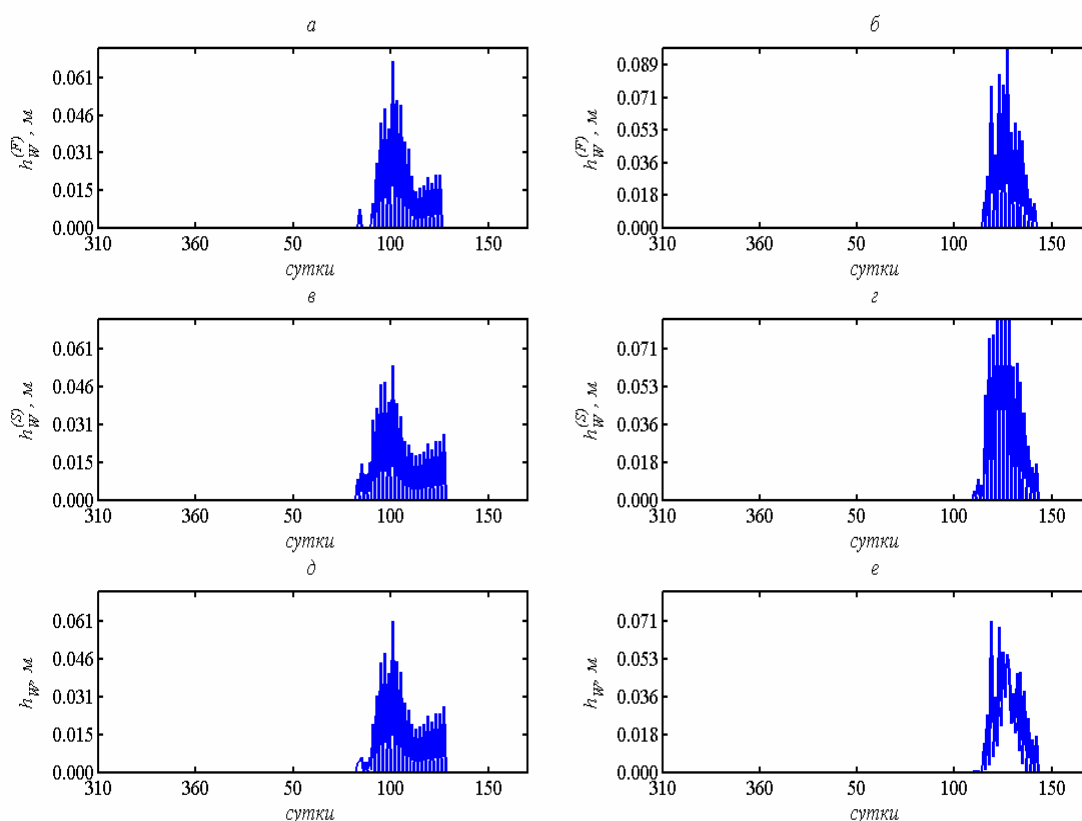


Рис. 7. Усредненные по площадям образований льда распределения суммарных толщин участков талой воды в толщах ЛП Амурского залива (*а, в, д*) и района южной части Татарского пролива (*б, г, е*): *а, б* – льды припая; *в, г* – льды участков открытой воды; *д, е* – льды районов акватории.

Поскольку при таянии толщина покрова падает, то период накопления талой воды и ее просачивания сквозь толщу ЛП также уменьшается. В связи с чем отмечаются возрастающие колебания толщины талой воды. Эти колебания исчезают в тот момент, когда на акватории района заканчивается цикл эволюции его ЛП.

В **четвертой** главе приведена разработка методики параметрической идентификации модели динамики распределения толщин льда (16), рассмотрены вопросы оценки ее адекватности натурным наблюдениям.

Задача параметрической идентификации математической модели состоит в



нахождении такого вектора  $p$ , который минимизирует меру отклонения выборочных и модельных распределений площадей ЛП  $\Phi(p)$ :

$$\min \Phi(p) \text{ для } p \in P, \quad (19)$$

где  $P \subset R^k$  – область допустимых значений параметров. Без ограничения общности полагаем, что область  $P$  соответствует вложенному в  $k$ -мерное евклидово пространство гиперкубу ( $k$  – число элементов  $p$ ). Длины его ребер характеризуют диапазон изменения параметров. Для решения задачи (19) был использован разработанный Р.С. Стронгиным информационно-статистический метод поиска экстремума. В этом случае многомерная задача его поиска приводится к последовательности одномерных задач поиска экстремума. Редукция размерности выполняется с помощью аппроксимаций кривых Пеано, или так называемых разверток. Согласно их построениям каждой точке области  $P$  соответствует единственный прообраз  $y \in [0,1]$ . Для разверток также выполняется свойство квазинепрерывности: близкие на отрезке точки при отображениях с помощью разверток имеют близкие образы (обратное не является верным: близкие в  $P$  точки при обратном отображении могут иметь прообразы, которые не являются близкими на отрезке  $[0,1]$ ). Следствием квазинепрерывности является непрерывность  $\Phi(p(y))$  как функции  $y$ . Поэтому решение (19) следует алгоритму одномерного поиска экстремума функции. В этой ситуации требуется задание границ допустимой многомерной области  $P$ , т. е. для каждого параметра надо указать диапазон его численного изменения. В отличие от традиционных методов, в частности градиентных методов, при использовании данного метода наличие подобных ограничений не приводит к требованию дополнительного введения в функционал  $\Phi(p(y))$  соответствующих штрафных функций. Поэтому отсутствует необходимость нахождения решений для последовательности безусловных подзадач поиска экстремума. Кроме того, при поиске решений многоэкстремальных задач требование задания диапазона интервалов изменений отдельных параметров представляется на практике более естественным и приемлемым, чем задание для них соответствующих конкретных численных начальных значений.

В настоящем случае решение задачи (19) выполняется на основании усредненной за период 1961–1989 гг. выборки наблюдений, каждое из которых характеризует площадь  $A_{rdg}^{(D)}$  льда  $g$  градации толщины (число исходных градаций толщин равно 6) в  $d$  декаде отдельного  $r$  района акватории моря. В этой выборке насчитывается 5154 таких значений  $A_{rdg}^{(D)}$  площадей. Указанные площади определяются соответствующим номером

$$\mu = 6 \left\{ \sum_{r'=1}^{r-1} [d_1(r') - d_0(r')] + d - d_0(r) + r - 1 \right\} + g, \quad (20)$$

где  $r$  – номер района,  $r = 1 \div 166$ ;  $d$  – номер декады;  $d_0(r), d_1(r)$  – соответственно начальная и конечная декады эволюции в  $r$  районе. Для каждого такого номера набор независимых переменных составляет: текущие сутки года, среднесуточная температура на 2-метровом горизонте слоя воздуха,

среднесуточные составляющие  $W_x$  и  $W_y$  скорости ветра на 10-метровом горизонте.

Зависимыми переменными задачи (19) являются усредненные за декаду модельные площади отдельных толщин льда  $A(x, t, h, p)$  для текущего  $t$  дня года из равномерной системы разбиения диапазона  $(0, H^*]$  на полуинтервалы (для наглядности вектор параметров указан в числе аргументов площади). Введение этого разбиения обусловлено тем, что градации толщин в исходной выборке являются неравномерными. А для численного моделирования требуется как раз равномерное разбиение с заданным шагом  $\Delta h$ . Вхождение равномерных полуинтервалов в неравномерные полуинтервалы исходного разбиения указывается посредством набора  $\{J_g\}_{g=1 \div 6}$ . Каждый элемент  $J_g$  представляет собой перечисление номеров равномерных полуинтервалов, которые содержатся в исходном разбиении. В настоящем рассмотрении набор параметров  $p = (T^*, T_F^*, \alpha_h^{(A)}, \alpha_h^{(S)}, \alpha_{hh}^{(S)}, \alpha_{wh}, \alpha_{hw}, \beta_w, \alpha_a^{(A)} A_s^*, \alpha_a^{(S)} A_s^*, \nu_1^{(A)}, \nu_2^{(A)}, \nu_1^{(S)}, \nu_2^{(S)}, \beta_1^{(A)}, \beta_2^{(A)}, \beta_1^{(S)}, \beta_2^{(S)}, b_a^{(A,0)}, b_a^{(A,T)}, b_a^{(A,u)}, b_a^{(S,0)}, b_a^{(S,T)}, b_a^{(S,h)}, b_a^{(S,W)})$  насчитывает  $k = 25$  элементов и  $\Delta h = 0.15$  м. Запись  $\Phi(p)$  принимает вид

$$\Phi(p) = e^T(p)e(p), \quad (21)$$

где  $e_\mu(p) = [A_{rdg}^{(D)} - f_\mu(p)] / A_s^*$  – остатки оценивания параметров модели,  $f_\mu(p) = 0.1 \sum_{d'=1}^{10} \sum_{j \in J_g} A(x_r, 10(d-1) + d', h_j, p)$  и  $\mu$  определяется (20). При записи  $e_\mu(p)$

учитывается еще тот факт, что  $A_{rdg}^{(D)}$  и  $\sum_{j \in J_g} A(x_r, 10(d-1) + d', h_j, p)$  имеют различные временные масштабы измерений: первая характеризует декадное значение площади  $g$  – й градации толщины, а вторая – ее суточное значение.

Область допустимых значений параметров модели  $P$  характеризует динамическую систему с заданным выборкой наблюдений набором ее среднедекадных пространственно-временных состояний. Как правило, границы этой области задаются на основе априорной информации о рассматриваемом объекте. Здесь для указания границ были выполнены представленные в предыдущем разделе этой главы статистические исследования на той части выборки, которая характеризует припай прибрежных районов. На основании указанных расчетов были определены границы диапазонов изменений параметров модели (15):  $\alpha_a^{(A)} A_s^*, \alpha_a^{(S)} A_s^* \in [0.001, 0.08]$ ;  $\alpha_h^{(A)}, \alpha_h^{(S)} \in [0.001, 0.009]$ ;  $b_r^{(A)}, b_r^{(S)} \in [0.001, 0.09]$ ;  $b_h \in [0.001, 0.09]$ . Для указания диапазонов изменения  $T_F^*$  и  $T^*$  в этих работах используется замеченный В.М. Карпецом факт: из наблюдений следует приблизительное совпадение границы морских льдов с изотермами приводного воздуха  $-8^\circ\text{C}$  в северном и  $-7^\circ\text{C}$  в южном полушариях. Диапазоны для остальных параметров определялись в интерактивном режиме при поиске решения задачи параметрической идентификации (21). В настоящем случае  $\alpha_{hh}^{(S)}, \alpha_{wh} \in [1, 10]$ ,  $\nu_1^{(A)}, \nu_1^{(S)} \in [0.001, 0.09]$ ,  $\alpha_{hh} \in [0.001, 0.009]$  и  $\beta_w \in [1, 10]$ .

Сущность основанной на использовании разверток Пеано вычислительной схемы решения задачи (19) состоит в следующем. На отрезке  $[0, 1]$

действительной оси  $R^1$  выбирается последовательность точек  $y_0, y_1, \dots, y^*$ , а затем определяются значения функции  $\Phi(p_m(y_0)), \Phi(p_m(y_1)), \dots, \Phi(p_m(y^*))$ , где нижний индекс  $m$  указывает на номер разбиения координатными гиперплоскостями исходного гиперкуба;  $p_m(y)$  – образ точки действительной оси, который вычисляется с помощью кривых Пеано;  $y^*$  – искомое решение. Тогда решением (21) является такое значение  $p^* \equiv p_m(y^*)$ , при котором  $\Phi(p(y))$  принимает свое минимальное значение. Для выбора такой последовательности точек  $y_0, y_1, \dots, y^*$  следует указать эффективную стратегию их поиска, т. е. алгоритм одномерного поиска экстремума функции  $\Phi(p(y))$ . В разработанной для моделирования динамики ЛП и построения прогноза его состояния информационной системе (ИС) «Ледяной покров Японского моря» для этих целей используется хорошо известный и надежный алгоритм метода золотого сечения.

Результаты решения задачи параметрической идентификации (19) с помощью кривых Пеано представлены на рис. 8 (цифрами отмечены порядковые номера последовательности вычисления  $\Phi(p(y))$  при поиске решения).

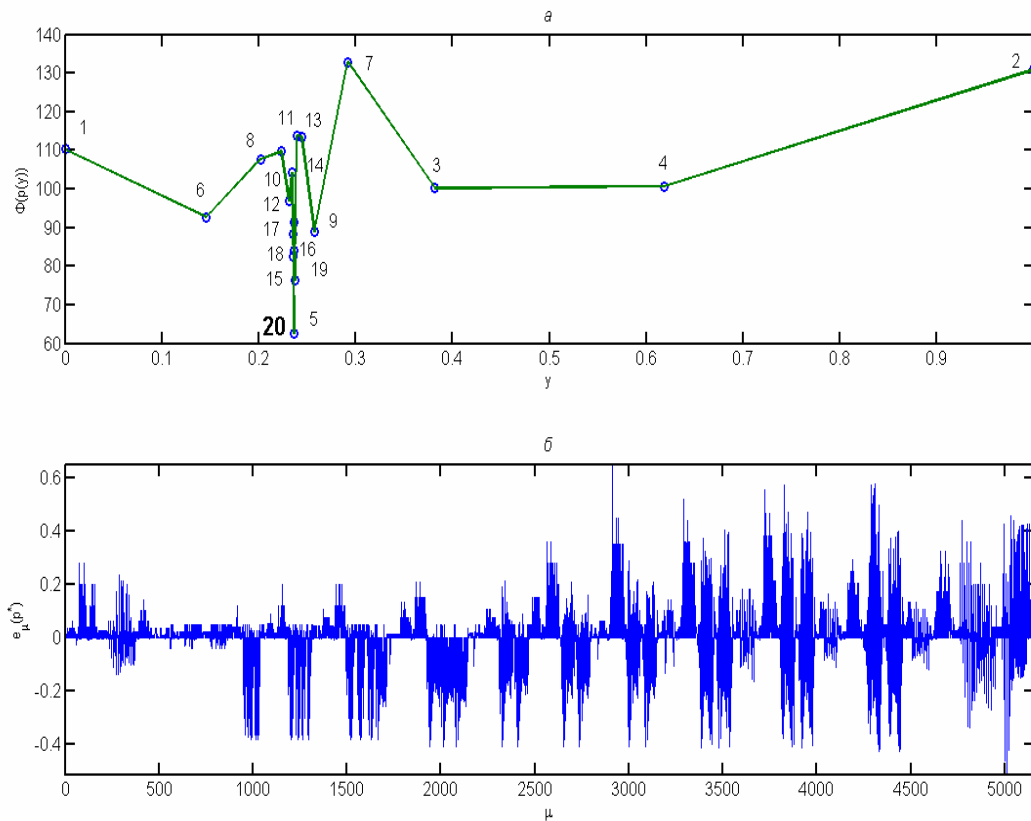


Рис. 8. Результаты решения задачи параметрической идентификации: а – график функции  $\Phi(p(y))$ , где цифрами отмечены порядковые номера последовательности ее вычисления; б – распределение остатков.

Анализ результатов показывает, что при решении (19) генерируется неравномерное адаптивное покрытие области поиска точками вычислений  $\Phi(p(y))$ . В окрестности решения  $y^*$  имеет место рост плотности точек  $y_0, y_1, \dots, y^*$ , что в конечном итоге и приводит к окончанию работы

вычислительной схемы поиска минимума  $\Phi(p(y))$ . Следуя этой схеме, непосредственному решению  $p^*$  соответствует  $y^* = 0,236$ . Для ее нахождения, т. е. для решения задачи (19), требуется выполнить 20 вычислений. Тогда как при использовании градиентных методов только на одной итерации следует выполнить 25 таких вычислений. Для нахождения доверительных интервалов искомых параметров в точке минимума  $p^*$  следует вычислить  $\sigma^2(p^*) = \Phi(p^*) / (M - k - 1)$  – дисперсию ошибки оценки;  $V(p^*) = 2\sigma^2(p^*)N^{-1}$  – ковариационную матрицу оценок параметров, где  $N = 2 \left\{ \sum_{\mu=1}^n [\partial f_{\mu}(p^*) / \partial p_i][\partial f_{\mu}(p^*) / \partial p_m] \right\}_{i,m=1+k}$  – аппроксимация матрицы Гессе, алгоритм вычисления которой следует методу Гаусса (приращение аргумента  $\delta p_i$  при нахождении соответствующих частных производных здесь составляет  $10^{-3} p_i$ , что в общем соответствует практическим рекомендациям). Оценки элементов  $p^*$  для модели (16) определяются приведенными в таблице интервалами.

Парамет	Значение	Парамет	Значение
$p$		$p$	
$T^*$	$-7,6 \pm 0,8$	$T_F^*$	$-6,3 \pm 0,7$
$\alpha_h^{(A)}$	$(3,25213 \pm 1,41234) \cdot 10^{-3}$	$\beta_1^{(A)}$	$(7,06250 \pm 2,23817) \cdot 10^{-4}$
$\alpha_h^{(S)}$	$(2,00313 \pm 0,87690) \cdot 10^{-3}$	$\beta_2^{(A)}$	$21,09382 \pm 2,41643$
$\alpha_{hh}^{(S)}$	$(6,75000 \pm 3,54372) \cdot 10^{-3}$	$\beta_1^{(S)}$	$(6,75114 \pm 0,86412) \cdot 10^{-3}$
$\alpha_{wh}$	$2,81969 \pm 0,68741$	$\beta_2^{(A)}$	$21,09382 \pm 2,41643$
$\alpha_{hw}$	$(2,53844 \pm 2,40695) \cdot 10^{-3}$	$b_a^{(A,0)}$	$(5,53125 \pm 1,24344) \cdot 10^{-2}$
$\beta_w$	$4,74062 \pm 0,54146$	$b_a^{(A,T)}$	$(1,49062 \pm 0,63352) \cdot 10^{-2}$
$\alpha_a^{(A)} A_S^*$	$(2,68750 \pm 0,86265) \cdot 10^{-2}$	$b_a^{(A,u)}$	$(5,94063 \pm 1,93126) \cdot 10^{-2}$
$\alpha_a^{(S)} A_S^*$	$(1,93750 \pm 0,59215) \cdot 10^{-2}$	$b_a^{(S,0)}$	$(5,53125 \pm 1,47089) \cdot 10^{-2}$
$v_1^{(A)}$	$(2,04688 \pm 0,64427) \cdot 10^{-2}$	$b_a^{(S,T)}$	$(7,75108 \pm 2,09674) \cdot 10^{-2}$
$v_2^{(A)}$	$15,71884 \pm 4,38921$	$b_a^{(S,h)}$	$(3,74941 \pm 1,20877) \cdot 10^{-2}$
$v_1^{(S)}$	$(7,05313 \pm 1,85319) \cdot 10^{-3}$	$b_a^{(S,W)}$	$(1,75017 \pm 0,93516) \cdot 10^{-2}$
$v_2^{(S)}$	$15,71884 \pm 4,38921$		

Размерности  $\alpha_a^{(A)}, \alpha_a^{(S)} - (\text{м}^2 \cdot \text{°C} \cdot \text{сут})^{-1}$  (для удобства записи они приведены в масштабе площади открытого района акватории  $A_S^*$ );  $\alpha_h^{(A)}, \alpha_h^{(S)}, \alpha_{hh}, b_h, v^{(A)}, v^{(S)} - (\text{м} \cdot \text{°C} \cdot \text{сут})^{-1}$ ;  $\beta_1^{(A)}, \beta_1^{(S)} - (\text{°C} \cdot \text{сут})^{-1}$ ;  $\beta_2^{(A)}, \beta_2^{(S)}, v_2^{(A)}, v_2^{(S)} - \text{м}^{-1}$ ;  $\alpha_{wh}, \alpha_{hw}, \beta_w, b_{ah}, b_T - (\text{°C} \cdot \text{сутки})^{-1}$ . При выполнении процедуры оценивания принимается совпадение  $\beta_2^{(A)}$  и  $\beta_2^{(S)}$ , что обусловлено достоверностью статистической гипотезы их совпадения. В первоначальной формулировке (15) и соответствующих расчетах полагалось различие их значений. Однако результаты оценивания указывают на выполнение указанной гипотезы. После ее принятия была вновь выполнена процедура оценивания.

Для оценки статистической состоятельности оценок исходная выборка была разбита на две части, первая из которых характеризует ЛП районов залива

Петра Великого (районы с номерами 1–4,8 и 9 на рис. 1), а вторая – ЛП остальных районов. Допустимость такого разбиения выборки обусловлена независимостью состояний ЛП этих районов. Далее процедура оценки выполнялась на основании каждой из этих выборок. Сопоставление полученных решений показывает их приемлемую для практики близость.

Значения найденных оценок параметров соответствуют качественным представлениям о характере и последовательности этапов циклов эволюции ЛП Японского моря. Так, выполнение неравенств  $\beta_1^{(A)} < \beta_1^{(S)}$  и  $\nu_1^{(A)} > \nu_1^{(S)}$  отвечают следующей ситуации. В результате проникновения коротковолновой радиации в лед его таяние происходит не только с верхней поверхности (при отсутствии разводьев величина стаивания сверху может быть в 5-6 раз выше, чем снизу), но также с боков, снизу и в самой толще ЛП (внутреннее таяние). И поэтому интенсивность таяния ЛП превосходит интенсивность его формирования даже в случае симметрии распределения температуры атмосферы, когда  $T^* - T$  для этапа осеннего формирования и  $T - T^*$  для этапа весеннего разрушения совпадают. Так известно, что при одной и той же температуре воздуха в ясные дни интенсивность таяния ЛП выше, чем в остальные дни. Поскольку скорости ветра на этапе формирования ЛП превышают их значения для этапа таяния, то интенсивность осеннего торошения  $\nu_1^{(A)}$  превышает интенсивность  $\nu_1^{(S)}$  весеннего торошения.

При решении (19) не используется система нормальных уравнений, которая получается приравниванием нулю элементов градиента функционала  $\Phi(p)$ . Поэтому для оценки «качества» подгонки модели под используемый выборочный материал следует оценить статистическую значимость отличия оценки средней ошибки  $\bar{e}_\mu(p^*)$  от нуля (при использовании нормальных уравнений эта величина автоматически равна 0). В настоящем случае  $\bar{e}_\mu(p^*)=0,00172$ , а его стандартное среднеквадратичное отклонение  $\sigma(e_\mu)=0,11023$ . Значение соответствующей  $t$ -статистики равно 0,01563, что существенно меньше соответствующего табличного значения. Поэтому принимается нулевая гипотеза  $H_0 : \bar{e}_\mu = 0$ , что указывает на хорошее качество подгонки модельных и наблюдаемых в экспериментах распределений. Применение такой методики оценивания степени соответствия наблюдаемых и модельных распределений для всей совокупности районов акватории позволяет оценить границы применимости предлагаемых здесь моделей эволюции ЛП. На рис. 9 представлены распределения мер близости между выборочными распределениями  $\{A_{rdg}^{(D)}\}$  и их модельными распределениями. В случае рис.9а в качестве меры близости использовалось принятое в практике исследований морского ЛП соотношение

$$P_d = (m_d / n_d) \cdot 100 \%,$$

где  $m_d$  – число так называемых оправдавшихся прогнозов суммарной площади покрытия (допустимые погрешности прогнозов для этой величины составляют  $\pm 1$  балл) в  $d$  декаде,  $n_d$  – общее число прогнозов, которые можно оценить при наличии фактического материала. В случае рис.9б мерой близости выступает

коэффициент корреляции между наблюдаемыми и модельными распределениями. Здесь диапазон изменения меры близости был разбит на 3-и части. Районы моря, где значения меры выше 75 % диапазона ее изменения, маркируются 1; районы, где значения меры от 50 до 75 % – цифрой 2; цифрой 3 маркируются районы, где значения меры меньше 50 % диапазона ее изменения. Анализ рис.9 указывает на хорошую степень соответствия наблюдаемых и модельных распределений для большинства районов моря. В меньшей степени это относится к помеченным цифрой 3 районам моря, что обусловлено рядом обстоятельств. Так водообмен через проливы оказывает существенное влияние на гидрологический режим южной и восточной частей моря.

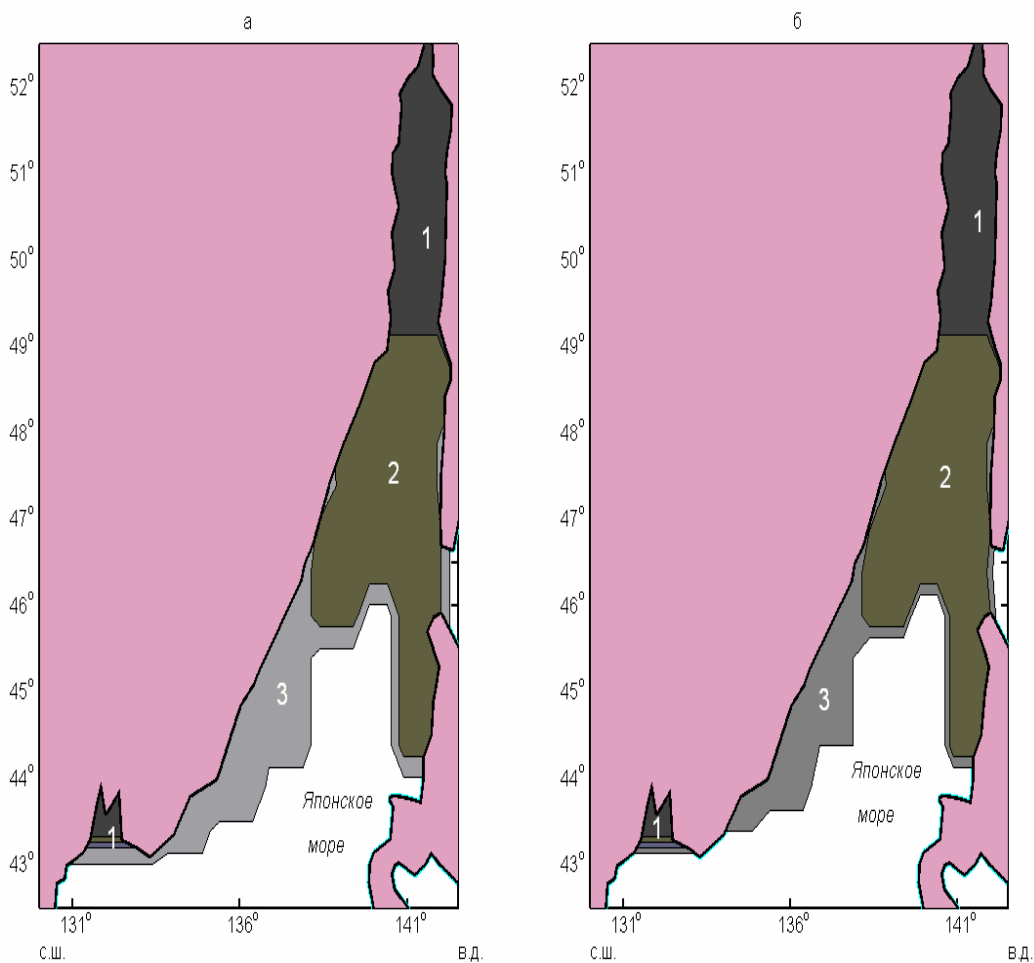


Рис.9. Карта степени соответствия наблюдаемых и модельных распределений площадей льда (а) и средних толщин (б) в отдельных районах акватории Японского моря

Втекающие через Корейский пролив субтропические воды ветви Курошио в течение всего года отепляют воды южных районов моря и воды, прилегающих к побережью Японских островов вплоть до пролива Лаперуза, в результате чего воды восточной части моря всегда теплее, чем западной. Поэтому в этих районах моря отмечается пониженное соответствие между указанными распределениями.

В работе также выполнен ряд вычислительных экспериментов, которые ориентированы на изучение последствий воздействия на ЛП Японского моря возможных изменений температуры атмосферы. Если сохраняются условия формирования и таяния ЛП ( $T^*$  и  $T_F^*$ ), то при увеличении температуры 2-метрового слоя воздуха на  $1^\circ\text{C}$  суммарные потери площади льда составят 607 площадей акватории таких районов, а объемов льда – ЛП на акватории 432 районов толщиной 1 м. В данной ситуации площадь ЛП моря будет составлять 69% ее современного состояния, а объемы льда моря – 64 % этого состояния. При повышении температуры 2-метрового слоя воздуха на  $5^\circ\text{C}$  суммарные потери площади льда составят 2381 площадей акватории таких районов, а объемов льда – ЛП на акватории 1486 районов толщиной 1 м. В этой ситуации площадь ЛП моря будет составлять 24% ее современного состояния, а объемы льда – 16 % этого состояния.

В **пятой** главе выполнено обоснование актуальности построения предметно-ориентированного программного обеспечения для решения поставленных в работе задач. Для его построения выполнен обзор функций информационной системы (ИС), рассматриваются этапы построения ИС «Ледяной покров Японского моря» и алгоритмы решения задачи численного моделирования эволюции морского ЛП. Приводится функциональная структура системы.

Реализованная средствами MATLAB ИС «Ледяной покров Японского моря» ориентирована на выполнение исследований по выявлению статистических закономерностей изменения состояний ЛП Японского моря, построение на основании выявленных зависимостей математической модели его эволюции и прогноз состояний ЛП при заданных распределениях температуры и скорости ветра на стандартных горизонтах слоев воздуха. Программная реализация системы имеет модульную структуру. Для программной реализации алгоритмов использовались языки программирования C++, VB, MATLAB. Для построения такой предметно-ориентированной ИС требуются:

- разработка способов количественного представления пространственно-временных состояний исследуемых объектов (модели данных);
- создание программного обеспечения (ПО) для выполнения дешифрирования спутниковых снимков состояния ЛП моря;
- создание ПО для выполнения анализа выборочных распределений параметров состояния ЛП моря;
- создание ПО для численного решения уравнений модели эволюции ЛП моря, выполнения ее параметрической идентификации и оценки адекватности;
- создание ПО для представления результатов моделирования эволюции ЛП моря и прогноза его состояний (визуализация, печать и запись результатов в разделы БД);
- решение ряда задач для тестирования работоспособности предлагаемых методик и их программных реализаций;
- создание ПО для организации многооконного интерфейса работы ИС.

Как правило, модель данных определяет способ их анализа, аппарат и пространственно-временной масштаб для последующего математического моделирования. Действительно, если пространственно-временное распределение некоторой характеристики представлено только временным распределением ее интегральной по площади величины (например, общая площадь льда на акватории моря), то используются методология и аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. При детальном представлении данных (например, задано пространственно-временное распределение площадей льда) уместным является применение методологии и аппарата уравнений в частных производных. Здесь при построении модели данных учитывались особенности береговой линии моря и детальность представления исходных выборок данных. Поскольку акватория части моря, где за многолетний период наблюдений отмечалось хотя бы разовое присутствие ЛП, представляет собой вытянутую вдоль одного направления область, то для представления значения  $k$ -й градации некоторого динамического параметра ЛП  $X$  в  $r$ -м районе  $d$ -й декады  $y$ -го года принимается запись  $X(n_r, d, y, k)$ , где  $n_r$  – порядковый номер района (см. рис. 1). Напомним, что  $n_r \equiv r$  при  $r \leq 114$  (значение  $X$  в открытой части акватории районов), а при  $114 < r \leq 166$  –  $X(n_r, d, y, k)$  характеризует значение характеристики льда припая. Полагается, что в прибрежном районе имеются зона открытого моря (ей приписан номер этого района,  $r \leq 114$ ) и участок припая (его номер  $n_r > 114$ ). В системе хранится одномерный массив элементов, на основании которого определяется соответствие между участком открытой воды прибрежного района и участком расположения припая (понятно, что элемент этого массива отличен от нуля только для прибрежных районов). Для удобства решений уравнений в частных производных каждому  $n_r$  поставлены в соответствие: географические координаты центра его района; координаты узла  $(i_r, j_r)$  вычислительной сетки; номера 4-х его ближайших на акватории соседних районов  $n_{r,1}, n_{r,2}, n_{r,3}$  и  $n_{r,4}$  (квартет соседей). Узлы регулярной вычислительной сетки  $(i_r - 1, j_r), (i_r + 1, j_r), (i_r, j_r - 1), (i_r, j_r + 1)$  последовательно отвечают указанным номерам районов.

Форма представления результатов моделирования насчитывает в своем составе: тип и параметры используемых моделей, пространственно-временные распределения толщин льда для отдельных районов акватории открытой воды и припая. Пространственно-временные распределения толщин льда определяются массивом площадей  $A(n_r, t, l)$  толщины  $l \cdot dh$ , где  $t$  – текущие сутки цикла эволюции ЛП моря,  $1 \leq t \leq 220$ . Здесь мы приняли 10 равномерных градаций толщины  $1 \leq l \leq 10$  и  $dh = 0,15$  м. Графическое представление результатов может быть записано в файл растрового формата (BMP, GIF, JPG, PCX, PNG, TGA, TIFF) с возможностью выбора масштаба, коррекцией маркеров на отдельных линиях, нанесение текстового наименования осей и формирования поясняющего текста (легенды).

Для реализации указанных требований был выполнен комплекс исследований по определению структуры системы и составляющих



предметных БД. В результате чего были разработаны следующие смысловые блоки ИС.

**1. База атрибутивных данных.** На данной стадии изучения ЛП Японского моря атрибутивными данными являются: наблюдаемые пространственно-временные распределения  $S, h$  и  $F$ , где временной шаг составляет одну декаду; пространственно-временные распределения толщин льда по площадям с неравномерным шагом изменения толщины и временным шагом одна декада; пространственно-временные распределения температуры на 2-метровом горизонте слоя воздуха (временной шаг составляет одни сутки); пространственно-временные распределения составляющих скорости ветра на 10-метровом горизонте слоя воздуха (временной шаг составляет одни сутки). В этой БД также хранятся сведения: векторное представление контура моря; географические координаты центра каждого района и соответствующие им порядковые номера узлов расчетной сетки (см. рис. 1); тип каждой ячейки (0 – внутренний узел расчетной сетки, 1 – граничный узел берег–море, 2 – граничный узел море – море) вычислительной сетки; площадь района акватории; для граничных узлов сетки (тип узла равен 1) указаны направляющие косинусы нормали к линии берега. Для каждого выделенного района акватории хранятся номера его 4 ближайших на акватории соседних районов. Здесь же хранятся служебные сведения, сведения о настройках и размещении файлов системы, протокол ведения интерактивного режима, массивы для справочной информации. В отдельный раздел БД записываются результаты расчетов.

**2. Аналитический блок.** Блок составляют методики, алгоритмы используемых процедур анализа данных, алгоритмы вычислительных процедур, математические модели термической динамики толщины и термической динамики площади, математических моделей торошения и формирования талой воды на верхней поверхности ЛП, математической модели эволюции пространственно-временных распределений характеристик ЛП моря. Работа системы организована таким образом, что имеется возможность согласованного подключения отдельных вариантов математических моделей. При реализации алгоритмов программ в зависимости от установочных настроек предусмотрена возможность промежуточной печати результатов в табличном, графическом и картографических видах на экран монитора или в раздел БД.

**3. Программные средства.** Настоящий блок составляют программы для решения рассматриваемых прикладных задач (обработка изображений, анализ данных, решение уравнений модели, математическое моделирование, параметрическая идентификация моделей и т. д.) и реализации функций ГИС-технологий, визуализация результатов анализа данных и математического моделирования, инструментарий для организации и ведения интерактивного режима работы в среде ИС.

**4. База картографических данных.** Указанная БД предназначена для хранения наборов цифровых топооснов ряда карт. Поскольку используемые и формируемые при работе рассматриваемой ИС тематические карты являются по своей сущности «двухслойным» (контур моря и распределение отдельных характеристик), то введение этой базы на данном этапе изучения ЛП моря

обусловлено перспективой дальнейшего развития ИС «Ледяной покров Японского моря».

При построении ПО мы ориентировались на создание именно специализированного программного комплекса, поскольку разработка универсального ПО для решения «всех» задач предметной области нам представляется тупиковой. Действительно, для обеспечения универсальности обычно требуется усложнение структуры ПО и программ. Кроме того, понятно, что абсолютная универсальность недостижима. Разработка ПО выполнялась таким образом, чтобы имелась возможность добавления отдельных программ. Для согласованного вызова различных вариантов одной и той же функции их имена являются входными параметрами вызывающих их соответствующих функций. В программной реализации ИС имеется глобальная переменная VT (Variable Task). Указанная переменная определяет собой структуру, элементы которой являются доступными для отдельных функций системы (в ее программной реализации должен присутствовать оператор global VT). Значения элементов задают установочные параметры работы ИС, тип используемой модели, настройки работы отдельных функций, режим и параметры вычислений и т.д. Далее приводится ряд применяемых в ИС методик работы с этими пакетами и алгоритмы отдельных вычислительных процедур (они отсутствуют в пакетах расширения). Целесообразность их рассмотрения обусловлена принципиальной важностью выполняемых ими функций.

В **заключении** приводятся общие итоги работы, рассматриваются перспективы дальнейших исследований морского ЛП и ЛП Японского моря, которые ориентированы на решение актуальных научных проблем и прикладных задач.

### **Основные результаты и выводы**

1. Выявлено статистически значимое совпадение температур на 2-метровом горизонте надледного слоя воздуха в момент первичного появления образований льда на акватории Японского моря и в момент их начального таяния.
2. Выявлен факт того, что состояние припая ЛП Японского моря определяет состояние ЛП в открытой части моря и наоборот.
3. Разработаны и исследованы модели термической динамики характеристик льдин (толщины, площади и массы), где учитываются ограничивающие их рост динамические факторы (снижение с ростом толщины ЛП потока тепла из воды в атмосферу; осолонение подледных вод солями, которое имеет место вследствие миграции солей изо льда в воду и т. д.) и формирование в толще ЛП на стадии ее таяния талых вод.
4. Разработана и исследована кинетическая модель формирования и таяния масс морских льдин, где учитываются дрейф и термическая динамика масс льдин, появление и выбывание льдин, переходы льдин открытого моря во льды припая при формировании ЛП и обратные переходы при его таянии, агрегация льдин и их дробление.

5. Выполнены построение и исследование крупномасштабной модели пространственно-временной динамики масс льда.
6. Разработана и исследована кинетическая модель формирования и таяния площадей и толщин морских льдин, где учитываются дрейф, термическая динамика площадей и толщин льдин, появление и выбывание льдин, переходы льдин открытого моря во льды припая при формировании ЛП и обратные переходы при его таянии, торошение льда, агрегация и дробление льдин.
7. Выполнены построение и исследование крупномасштабной модели формирования и таяния площадей и толщин ЛП Японского моря.
8. Разработана методика параметрической идентификации предлагаемых моделей. Для ее реализации многомерная задача поиска экстремума сведена к последовательности решений одномерных задач их поиска. Результаты применения методики показывают хорошую степень адекватности модели выборочным распределениям. Показана статистическая состоятельность оценок параметров модели.
9. Разработана методика составления прогноза состояния ЛП Японского моря при изменении температурного и ветрового режимов надледного слоя воздуха.
10. Разработана ИС «Ледяной покров Японского моря».

**Основное результаты** диссертации опубликованы в работах:

1. Четырбоцкий А.Н., Базыкин А.Д., Хибник А.И. Качественное исследование одной из моделей, описывающей динамику системы хищник-жертва с учетом насыщения и конкуренции: Препринт № 19 (106). Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1983. 31 с.
2. Тузинкевич А.В., Четырбоцкий А.Н. Модель сезонной динамики взаимодействующих видов // Математическое моделирование в популяционной биологии. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1985. С. 84-101
3. Четырбоцкий А.Н. Новый подход к решению задач многомерного шкалирования // Анализ данных и моделирование процессов в природных системах. Владивосток, ТИГ ДВО АН СССР, 1990. С.64-74.
4. Шемендюк Г.П., Бабцев В.А., Четырбоцкий А.Н. Статистическое исследование износов наружной обшивки судов ледового плавания // Морской транспорт. Сер.Техническая эксплуатация флота. 1991. № 23 (763). 15с.
5. Четырбоцкий А.Н. Методы и алгоритмы решения задач снижения размерности пространства описания. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. 95 с.
6. Четырбоцкий А.Н. Пакет прикладных программ для решения задач снижения размерности пространства описания // Управляющие системы и машины. Киев: Наукова думка. 1991. Т.1(111). С. 103 – 106
7. Четырбоцкий А.Н. Идентификация моделей вертикального распределения плотности океанских водных масс // Информатика и моделирование в океанологических исследованиях. Владивосток: Дальнаука. 1999. С. 131-143.
8. Четырбоцкий А.Н. Локальная эволюция толщины ледяного покрова водных поверхностей // Тр. ТОВМИ им. адм. Макарова. 2001. Вып. 29. С. 117-123.
9. Четырбоцкий А.Н. Геохимический процесс минералообразования как динамика системы типа «ресурс-потребитель» // Электронный журнал

- «Исследовано в России», 114, с.1257-1264, 2002 г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/114.pdf>
10. Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря: исходные данные и процедуры восстановления пропущенных значений // Электронный журнал «Исследовано в России», 7, С.88-93 .2003г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/007.pdf>
11. Четырбоцкий А.Н., Лукиянчук И.В., Руднев В.С. Кинетика островкового роста анодно-искровых покрытий // Журнал физической химии. 2004. Т.78.№ 3. С.536 - 539.
12. Четырбоцкий А.Н. Формирование и разрушение ледяного покрова замерзающих морей // Криосфера Земли. 2005. Т. IX.№ 3. С.45-53.
13. Четырбоцкий А.Н. Прогноз ледового режима на акватории Японского моря (математическая модель)//Информационные технологии.2005.№ 8. С. 9-14.
14. Четырбоцкий А.Н. Параметрическая идентификация математической модели эволюции ледяного покрова Японского моря // Изв.ТИНРО.2005.Т.143. С.149-178.
15. Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря: анализ данных и моделирование. Владивосток: Дальнаука. 2005. 146 с.
16. Четырбоцкий А.Н. Технология построения геоинформационных систем для ледяного покрова замерзающих морей (на примере ГИС «Ледяной покров Японского моря») // Информационные технологии. 2005.№ 11. С.17-23.
17. Четырбоцкий А.Н. Анализ данных состояний многокомпонентных систем (на примере ледяного покрова Японского моря) // Геоинформатика.2005.№ 4. С.53-61
18. Четырбоцкий А.Н. Статистический анализ параметров состояний ледяного покрова Японского моря и математическое моделирование его эволюции // Водные ресурсы. 2006.Т. 33. № 3. С.289-299.
19. Четырбоцкий А.Н. Эволюция толщины припая замерзающих морей // Метеорология и гидрология. 2006. № 3. С.79-87.
20. Четырбоцкий А.Н. Кинетика формирования анодно-искровых покрытий// Математическое моделирование.2006.Т.18.№ 7.С.69-81
21. Четырбоцкий А.Н. Параметрическая идентификация математической модели формирования плазменно-электролитических покрытий // Информационные технологии. 2006.№ 9. С. 60-67
22. Четырбоцкий А.Н. Эволюция распределения толщин ледяного покрова Японского моря//Изв. РАН. ФАО. 2006. Т.42. № 5. С.694-702.
23. Четырбоцкий А.Н. Мониторинг состояний многокомпонентных объектов в геоинформационных системах // Тихоокеанская геология. 2006.№ 5.С. 81-87
24. Четырбоцкий А.Н. Параметрическая идентификация крупномасштабной модели эволюции морского ледяного покрова (на примере ледяного покрова Японского моря) // Информационные технологии. 2006.№ 11. С. 12-20
25. Четырбоцкий А.Н. Модель пространственно-временной динамики ледяного покрова Японского моря // Метеорология и гидрология. 2007. № 1.С.65-74
26. Четырбоцкий А.Н. Распределение толщин льда Японского моря // Криосфера Земли. 2007.Т. XI. № 1.С.37-44.

27. Четырбоцкий А.Н. Задачи крупномасштабного моделирования эволюции морского ледяного покрова // Метеорология и гидрология. 2007. № 5. С.46-56
28. Chetyrbotsky A.N. Parametric model for vertical distribution of water mass density // Proc. Pacific/Asia Offshore Mechanics Symp., Pusan, Oct. 31- Nov. 2, 1996, p. 33-36.
29. Chetyrbotsky A.N. Estimation of influence of a hotbed effect of conditions Japan sea ice cover//The 20<sup>th</sup> Proc. Int. Symp. On Okhotsk Sea & Sea Ice. February 20-24. 2005. p. 307-312