

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЙ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕГО ЭВОЛЮЦИИ

© 2006 г. А. Н. Четырбоцкий

Дальневосточный геологический институт ДВО РАН
Дальневосточное отделение Российской академии наук
690022 Владивосток, просп. 100-летия Владивостока, 159

Поступила в редакцию 10.03.2005

Приводятся результаты анализа данных выборки многолетних декадных наблюдений параметров состояний ледяного покрова Японского моря. На их основании формулируется модель эволюции распределения льдин по площади и толщине. Далее она используется для построения модели эволюции распределения толщин льда. Выполнено аналитическое исследование частных случаев. Рассматривается методика параметрической идентификации модели и оценка ее адекватности наблюдаемым распределениям. Модель может быть использована для прогноза состояния ледяного покрова Японского моря.

Изучение многокомпонентных систем в различных областях основано на учете и оценке большого числа разнообразных по своей природе показателей. Адекватное количественное описание подобных систем или совокупности ее элементов, взаимодействующих между собой определенным образом, возможно только в случае, когда число имеющихся единиц наблюдений (выборочных точек, объектов) достигает значительного объема и отражает основные особенности системы: наличие детерминированных и стохастических свойств, эволюционных этапов развития и скачков, обусловленных изменением функциональной структуры системы.

В настоящем случае исследуемой системой является ледяной покров Японского моря, который представлен статистически достоверной выборкой многолетних декадных наблюдений параметров состояний ледяного покрова (материал предоставлен В.В. Плотниковым, (Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН). Внешнее воздействие определяется распределениями температуры и скоростей ветра на стандартных в подобных исследованиях горизонтах атмосферы (материал за 1960–2001 гг. предоставлен В.П. Тунеголовцом, (Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН). Актуальность проведения статистических исследований обусловлена тем, что они позволяют выявить функциональную структуру процесса эволюции и конкретизировать региональную специфику ледового покрова Японского моря. Кроме того, анализ экспериментального материала и выявление основных свойств функционирования системы являются предварительными этапами построения матема-

тической модели явления. Экспериментальный материал также используется на этапах параметрической идентификации моделей и оценки их адекватности наблюдаемым процессам.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

В практике исследования ледового покрова в качестве параметров его состояния обычно выступают декадные значения сплоченности S , толщины покрова h и преобладающего размера льдин F в каждом из выделенных, сравнительно однородных по ледовым условиям районах моря [9, 16]. Сплоченность S (отношение площади льда в районе к площади района) является безразмерной величиной; единица измерения h и F – м. Для статистического исследования используется многолетняя выборка за 1961–1989 гг., которая характеризует значения показателей в баллах порядковых шкал измерений [6] (границы соответствующих диапазонов определяются фиксированными наборами чисел $\{S_i^{(T)} : S_i^{(T)} = 1/10\}_{i=0-10}$, $\{h_i^{(T)}\}_{i=0-6}$, $\{F_i^{(T)}\}_{i=0-7}$ и $S_0^{(T)} = h_0^{(T)} = F_0^{(T)} = 0$). Именно для этого периода имеется исчерпывающая и однородная выборка независимых наблюдений, составленная на основании результатов регулярных авиаразведок и характеризующая состояния ледяного покрова.

Вычисление элементарных статистик для d -й декады r -го района выполнено на основании методики формирования исходных наблюдений: оцифрованное бальное значение каждого параметра в рамках его определенной градации (обо-

значено символом измеряемого параметра) есть равномерно распределенная случайная величина (СВ). Полагается статистическая состоятельность и непрерывность оценок как функций случайных аргументов [10]. Вследствие чего допускается линеаризация оценок в окрестности математического ожидания(МО)аргументов. В этом случае выборочное среднее и выборочная дисперсия некоторой функции $X = \phi(x_1, x_2, E, x_n)$ определяется соотношениями

$$\bar{X} \approx \phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \text{ и } \sigma^2(X) \approx \sum_{k=1}^n (\partial\phi/\partial x_k)^2 \sigma^2(x_k) + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n (\partial\phi/\partial x_k)(\partial\phi/\partial x_l) \text{cov}(x_k, x_l),$$

где $\text{cov}(x_k, x_l)$ – выборочная ковариация между x_k и x_l . Когда СВ x_k равномерно распределена на полуинтервале $(x_{k-1}^{(T)}, x_k^{(T)})$, то, как известно, ее математическое ожидание и дисперсия определяются выражениями $M(x_k) = (x_{k-1}^{(T)} + x_k^{(T)})/2$ и $D(x_k) = (x_k^{(T)} - x_{k-1}^{(T)})^2/12$. Для оценки выборочной сплоченности аргументами является набор $\{S_i\}_{i=1-10}$ и набор $\{p_{dri}^{(S)}\}_{i=1-10}$ частот встречаемости площади льда с i -м баллом сплоченности. Тогда

$$\bar{S}_{dr} \approx \sum_{i=1}^{10} \bar{p}_{dri}^{(S)} M(S_i) \text{ и} \\ \sigma^2(S_{dr}) \approx \sum_{i=1}^{10} [M^2(S_i) \sigma^2(p_{dri}^{(S)}) + \bar{p}_{dri}^{(S)2} D(S_i)],$$

где $\bar{p}_{dri}^{(S)}$ – выборочная оценка средней частоты встречаемости, выборочная дисперсия которой $\sigma^2(p_{dri}^{(S)})$. Действительно, СВ $S_i (i=1-10)$ не зависит от частоты ее встречаемости. Поэтому $\text{cov}(p_{dri}, S_i) = 0$. Представляется естественным определить среднюю толщину покрова на основании СВ $h_{dr} = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^6 p_{dri}^{(Sh)} S_i h_j / \bar{S}_{dr}$, где $p_{dri}^{(Sh)}$ – частота совместной встречаемости площади льда с i -м баллом сплоченности и j -м баллом толщины, выборочная средняя которой $\bar{p}_{dri}^{(Sh)}$ и выборочная дисперсия $\sigma^2(p_{dri}^{(Sh)})$. В этом случае учитываются площади и объемы льда

$$\bar{h}_{dr} \approx \sum_{i=1}^{10} M(S_i) \sum_{j=1}^6 \bar{p}_{drij}^{(Sh)} M(h_j) / \bar{S}_{dr},$$

$$\sigma^2(h_{dr}) \approx \left\{ \sum_{i=1}^{10} [a_i^2 \sigma^2(p_{dri}^{(S)}) + b_i^2 D(S_i)] + \sum_{j=1}^6 c_j^2 D(h_j) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^6 [q_{ij}^2 \sigma^2(p_{drij}^{(Sh)}) + a_i q_{ij} \text{cov}(p_{dri}^{(S)}, p_{drij}^{(Sh)})] \right\} / \bar{S}_{dr}^2,$$

где $a_i = -\bar{h}_{dr} M(S_i)$, $b_i = \sum_{j=1}^6 p_{drij}^{(Sh)} M(h_j) - \bar{p}_{dri}^{(S)} \bar{h}_{dr}$, $c_j = \sum_{i=1}^{10} p_{drij}^{(Sh)} M(S_i)$ и $a_{ij} = M(S_i) M(h_j)$. При записи выражений учитывается независимость проведения измерений S и h . Выборочные средние \bar{F}_{dr} и дисперсии

$$\bar{F}_{dr} \approx \sum_{i=1}^7 \bar{p}_{dri}^{(F)} M(F_i) \text{ и} \\ \sigma^2(F_{dr}) \approx \sum_{i=1}^7 [M^2(F_i) \sigma^2(p_{dri}^{(F)}) + \bar{p}_{dri}^{(F)2} D(F_i)],$$

где $\bar{p}_{dri}^{(F)}$ – выборочная оценка средней частоты встречаемости отдельных льдин с i -м баллом преобладающего размера льдин; ее дисперсия – $\sigma^2(p_{dri}^{(F)})$. Поскольку F существенно превосходит S и h , то при анализе используется логарифмическая шкала измерений F . Обоснованность подобных преобразований обусловлена тем, что для реальных ситуаций важен поиск зависимостей не только между исходными параметрами, но также между их некоторыми монотонными функциями.

Особенности изменений указанных геометрических параметров ледяного покрова Японского моря для рассматриваемого периода наблюдений представлены на рис. 1, где помечены наблюдения в осенний 1, зимний 2 и весенний 3 сезоны (цифры указывают положения средних значений параметров для этих сезонов). Статистический анализ показывает следующее. Гистограмма сплоченности на рис. 1а соответствует U -образному распределению. Первая мода соответствует льдам низкой сплоченности (осенне формирование и весенне разрушение покрова), а вторая – покрову тех районов акватории, где льдом занято 0.6 и более площади. Значение моды приходится на сплоченность 0.8. Интересно отметить, что в [3, 8] это значение фигурирует в качестве верхней оценки сплоченности для ненулевого значения аналога гидростатического давления. Наблюдения в указанной зоне соответствуют полям льда большой протяженности и зрелым льдам припая, что имеет очевидное объяснение: на море имеются районы, где льды покрывают большую часть его акватории и остаются в этом состоянии до момента весеннего термического разрушения. Наличие этого факта предопределяет одно из положений

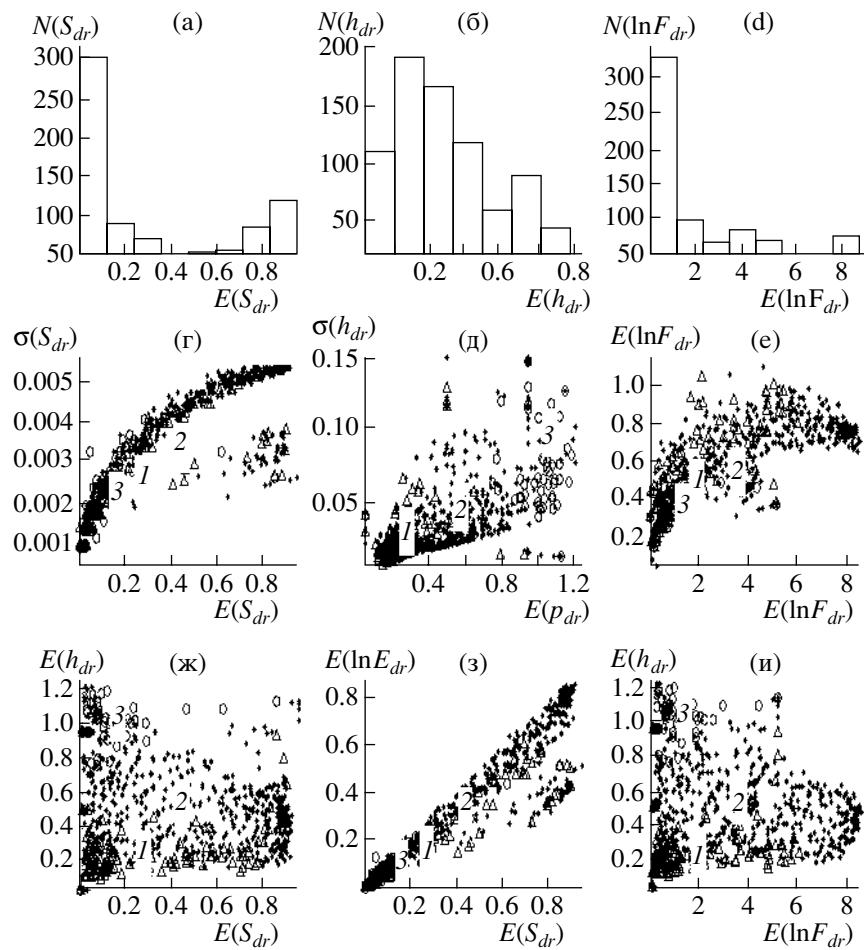


Рис. 1. Гистограммы распределений параметров S , h , $\ln(F)$ (а–в); совместные распределения выборочных средних и их СКО (г–е); парные распределения выборочных средних значений параметров (ж–и).

математической модели: должна быть предусмотрена ситуация, когда при максимальной сплоченностии дальнейшее понижение температуры не изменяет ее величину или ее полная производная в этом случае равна нулю.

Гистограмма толщин на рис. 1б соответствует бимодальному распределению. Согласно рис. 1д, первая мода соответствует льдам осеннего и зимнего этапов, а вторая – зрелому состоянию и началу весеннему этапу. Объяснением этого обстоятельства является тот факт, что при термическом разрушении покрова относительная скорость изменения его площадей существенно выше соответствующей величины для толщин. Это следует из той части рис. 1ж (центр группы точек 3), где низким значениям сплоченностей соответствуют высокие значения толщин.

Гистограмма логарифма размеров отдельных льдин на рис. 1в подобна гистограмме на рис. 1а: выборочный коэффициент корреляции между S_{dr} и $\ln F_{dr}$ – 0.946, т.е. при изменении сплоченностии

соответствующим образом изменяются размеры отдельных льдин.

Распределение выборочных точек на рис. 1г очевидно: чем ближе сплоченностъ к 1, тем ниже разброс ее значений. В качестве меры разброса выступает величина среднеквадратического отклонения (СКО) σ параметра. В правой части рис. 1г сосредоточены выборочные точки в основном зимнего этапа эволюции, так как ближе к окончанию формирования покрова и наступлению его зрелого состояния СКО сплоченности падает до нуля. При этом общее изменение сплоченности за весь цикл эволюции в некоторой степени удовлетворяет требованиям обратимого процесса, когда осеннее формирование покрова можно описать в терминах его весеннего разрушения и наоборот. Небольшие отличия между осенними и весенними этапами обусловлены: весной, кроме таяния льда, имеет место его дробление и это приводит к более быстрому его разрушению. Необходимо также обратить внимание на низкую вариабель-

ность S_{dr} , что соответствует узкой полосе изменения $\sigma(S_{dr})$.

Распределение выборочных точек на рис. 1д указывает на существенное различие осеннего и весеннего этапов эволюции покрова. При осеннем формировании покрова изменения $\sigma(h_{dr})$ следуют почти линейному закону своего аргумента и при выходе его на определенный уровень стабилизируется. В отличие от предыдущего случая, здесь отсутствует период падения $\sigma(h_{dr})$ для больших значений аргумента. Указанная ситуация обусловлена непрерывным изменением толщины и неоднородной структурой покрова. Отличительной особенностью весеннего разрушения является снижение $\sigma(h_{dr})$ при фактически неизменной толщине. Данное обстоятельство обусловлено теплопроводностью льда и проникновением коротковолновой радиации в его толщу[1]. Повышение температуры воздуха сопровождается таянием ледяной толщи как изнутри, так и с обеих сторон ее поверхности. При этом рост свободной от льда площади воды, отражательная способность которой существенно ниже поверхности льда, способствует интенсивному прогреву толщ воды. Поэтому первыми выбывают тонкие льды, а достаточно мощные ледяные массивы не претерпевают столь существенных изменений. Происходит уменьшение площади покрова и снижение его неоднородности $\sigma(h_{dr})$. Отличие осеннего и весеннего этапов обусловлено также различными физико-химическими свойствами морской воды. К моменту осеннего появления льда в толще воды формируется верхний опресненный квазиоднородный слой. Его формирование обусловлено опусканием охлажденных, более тяжелых масс морской воды и поднятием более теплых, легких глубинных ее масс. При этом охлажденные воды имеют повышенную соленость, а воздействие ветра существенно увеличивает интенсивность перемешивания [13]. Поэтому начальная эволюция протекает в достаточно однородной среде. А весной разрушение покрова происходит уже в неоднородной среде.

Распределение выборочных точек на рис.1е показывает, что динамика $\ln F_{dr}$ идентична динамике S_{dr} . Отличия касаются наклона огибающих кривых и наличия участка, где значения СКО принимают нулевые значения. Первая часть утверждения обусловлена различием удельных темпов роста/падения значений этих переменных. В отличие от размеров льдин, сплоченность характеризует инерционное состояние покрова всего района, и поэтому ее динамика имеет плавный характер. Другая часть наблюдаемого эффекта объясняется следующим: крупные льдины (их размеры превышают 10^4 м) присутствуют в береговой зоне и представляют припай, который в осенне-зимний период устойчив к изменению своих размеров. Равенство нулю среднеквадратичес-

ких отклонений указывает на эту ситуацию. Сдвиг $\sigma(\ln F_{dr})$ соответствует формированию, а также таянию и разрушению крупных льдин припая.

Парные распределения параметров представлены на рис. 1 случаями ж–и. Расположение выборочных точек в случаях ж, и указывают на отсутствие значимых корреляций между S_{dr} и h_{dr} , а также между $\ln F_{dr}$ и h_{dr} . Отмечается широкий разброс S_{dr} для тонкого льда $0 < h_{dr} < 0.5$, что может быть обусловлено наличием точки перегиба кривой толщины. Действительно, при понижении температуры на акватории сначала формируется тонкая пленка льда. И только затем следует заметный рост h . Случай з указывает на взаимнооднозначное соответствие S_{dr} и представленного в логарифмическом масштабе значением F_{dr} (коэффициент корреляции равен 0.946). Поэтому можно допустить, что в рамках принятой пространственной дискретности на образование торосов при агрегации отдельных льдин расходуются их незначительные площади. Действительно, если бы имело место обратное утверждение, то оно относилось бы и к преобладающему размеру льдин. А это не соответствует реальной ситуации.

Анализ данных распределений температуры воздуха показывает, что температура на стандартном при исследованиях покрова 2-м горизонте в начале формирования покрова и температура в начале его таяния совпадают. Так средняя температура воздуха за предшествующую декаду первичного присутствия льда на акватории Японского моря $T_0 = -(8.4 \pm 4.2)^\circ\text{C}$, а в момент первичного разрушения сплоченности (переход через максимум ее значений) $T_{S1} = -(9.1 \pm 4.7)^\circ\text{C}$. Если за момент начального таяния покрова принять декаду перехода через максимум толщины покрова, то $T_{h1} = -(7.8 \pm 4.3)^\circ\text{C}$ (для различия величин им приписан соответствующий подстрочный индекс). Согласно критерию Стьюдента, между этими величинами отсутствуют статистически значимые отличия. Таким образом, согласно результатам анализа декадных распределений сплоченности и толщин покрова Японского моря, справедливым является допущение о совпадении температуры воздуха в моменты первичного формирования покрова и первичного разрушения.

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Исследования морского ледяного покрова обычно выполняются в терминах сплоченностей и толщин покрова. Если в качестве динамической переменной системы используется масса образований льда, то для расчета скорости дрейфа требуется определить их площадь (дрейф льда обусловлен касательными напряжениями на обеих сторонах образований). Здесь независимыми динамическими переменными системы являются

толщина h и площадь отдельной льдины a . Их не- зависимость следует из рис. 1ж. Поэтому в дальнейшем полагается, что в произвольные моменты времени совокупности льдин можно упорядочить согласно сформированной на основании исходной выборки двумерной таблице размеров площадей отдельных льдин и их толщин. Согласно результатам предыдущего раздела и простым качественным соображениям, эволюция ледяного покрова определяется сочетанием: дрейфа льда; непосредственным образованием изолированных первичных льдин; последовательным ростом площадей отдельных льдин; формированием площадей k -го размера в результате агрегации площадей m -го и j -го размера $a_k = a_m + a_j$, где $m + j = k$; выбыванием определенного числа льдин из k -го размера вследствие их агрегации с льдинами произвольной площади.

Временная дискретность используемых здесь распределений температуры воздуха и скоростей ветра составляет одни сутки. Поэтому в дальнейшем рассматривается суточный временной шаг. В этом случае анализ соответствующих уравнений Эйлера для скорости дрейфа показывает, что для этого временного шага она имеет квазистационарный характер и определяется простыми соотношениями [5, 12]. При этом полагается массовый дрейф льда.

Достоверность допущения о характере агрегации отдельных льдин обусловлена тем, что потери их площадей при столкновениях незначительные (это следует из рис. 1з). Тогда площадь льдины является аддитивным параметром эволюции покрова: при агрегации льдин формируется льдина их суммарной площади. Непосредственные наблюдения указывают на преимущественно парный характер столкновений льдин. Так как столкновения более высоких порядков крайне редки, то в дальнейшем рассматривается только случай бинарной агрегации льдин.

При выполнении указанных допущений, динамика плотности числа льдин $n_{ah} = n(x, y, t, a, h)$ в открытых районах моря определяется результатом интегрирования уравнения Больцмана по импульсам отдельных льдин и положениями уравнения Смолуховского о характере парных столкновений

$$\begin{aligned} \partial n_{ah}/\partial t + \partial u_i n_{ah}/\partial x_i + \partial \dot{h} n_{ah}/\partial h + \partial \dot{a} n_{ah}/\partial a = \\ = f_{ah} + D \partial^2 n_{ah}/\partial h^2 + Q_{ah} + R_{ah}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2)$ – скорость дрейфа льда; $x = (x_1, x_2)$ – пространственные координаты; $\dot{h} \equiv dh/dt$ – скорость термического роста толщины; $\dot{a} \equiv da/dt$ – скорость термического роста площади изолированной льдины; $f_{ah} \equiv f(a, h_1, T)$ – скорость образования выбывания из системы изолированных льдин начальной

градации толщины и площади a ; D – коэффициент диффузии (для простоты изложения принимается const); $Q_{ah} \equiv Q(x, y, a, h, T)$, $R_{ah} \equiv R(x, y, a, h, T)$ – члены, которые представляют собой статистическое описание динамики агрегации и дробления частиц льдин [2, 4]. В (1) дополнительно полагается, что для ледяного покрова отдельных районов имеет место выравнивание толщин и этот процесс количественно описывается диффузией.

Представляется целесообразным выполнить параметризацию \dot{h} и \dot{a} на основании положения о пространственной ограниченности вмещающей покров морской среды [14, 15, 19, 20]. Понятно, что \dot{h} пропорциональна как текущему значению h , так и текущему значению доступного для толщины ресурса $h_{max} - h$, где h_{max} максимальная толщина льда за многолетний период наблюдений. Действительно, на этапе первичного формирования покрова, когда h мало, скорость роста является ее линейной функцией. По мере ее приближения к зрелому состоянию покрова $h \sim h_{max}$, когда весь ресурс $h_{max} - h$ уже “израсходован”, толщина стабилизируется, и, поэтому, на этапе зрелого состояния \dot{h} равна нулю. На этапе же таяния и механического разрушения имеет место обратная ситуация. В момент окончательного разрушения льда эта функция обращается в нуль. Интенсивность процессов определяется температурой воздуха, толщиной снежного покрова h_s и рядом сопутствующих факторов $F = (F_1, F_2, E, F_k)$ (альбедо поверхности снега и т.д.). Поскольку результаты статистического анализа распределений температуры воздуха показывают совпадение температур начального формирования и начального таяния покрова (в дальнейшем обозначается через T^*), то

$$\dot{h} = f_h(T, T^*, h_s, F)(h_{max} - h)h.$$

Аппроксимацией $f_h(T, T^*, h_s, F)$ может служить ее линейное представление $\alpha(T - T^*) + \beta h_s + + \sum_{l=1}^k \gamma_l (F_l - F_l^*)$, где F_l^* – значение факторов внешней среды, при которых начинается первичное формирование покрова. Значения оценок соответствующих коэффициентов могут быть найдены на основании многолетних рядов наблюдений. Однако для покрова Японского моря подобные наблюдения имеют фрагментарный характер или отсутствуют. Поэтому далее рассматривается частный случай, когда воздействие внешней среды на толщину покрова характеризуется температурой воздуха и не учитывается толщина снежного покрова, а значения остальных внешних динамических переменных фиксированы. Поэтому термическая эволюция толщины покрова записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{h} &= (T - T^*)[\alpha_h \Theta_1(T) + \alpha'_h \Theta_2(T)](h_{\max} - h)h, \\ \Theta_1(T) &= \Theta(T^* - T), \\ \Theta_2(T) &= \Theta(T - T^*),\end{aligned}\quad (2)$$

где $\Theta(z)$ – функция Хевисайда, равная 1 при $z > 0$, в ином случае – 0; α_h, α'_h неотрицательные коэффициенты пропорциональности. Их размерность $(\text{м}^{-1} \text{С}^{-1})$, т.е. численное значение каждого из них характеризует суточное относительное изменение толщины покрова при изменении температуры воздуха на 1°C . Перемена знака \dot{h} происходит в тот момент, когда температура слоя воздуха превышает значение T^* . В настоящем случае T^* характеризует определенное сочетание внешних условий, при которых начинается первичное ледообразование. Очевидно также, что ее значения для припая T_B^* и льда открытой части районов моря T^* различны. Действительно, воды прибрежной зоны являются относительно неглубокими и более пресными вследствие их опреснения речными водами и стоками промышленных предприятий. И поэтому ледообразование в открытых районах моря начинается при более низких температурах воздуха, чем в прибрежных районах. Термическое разрушение льда в открытых районах моря также начинается раньше и при более низких температурах – в этот период активно проявляет себя сочетание воздействия солнечной радиации и теплых течений Японского моря [18]. Численные значения оценок α_h, α'_h, T^* и T_B^* определяются при проведении серии вычислительных экспериментов на основании выборки распределений температуры воздуха и толщин покрова.

Если T – периодическая функция, то результат ее интегрирования сдвинут во времени по отношению к периодичности T . Поэтому имеет место временное запаздывание между минимумом температуры воздуха T_{\min} и максимумом толщины покрова. Указанная закономерность отмечается в многочисленных исследованиях, а для покрова Японского моря, в частности, результатами статистического анализа выборки. Если для водоема темп охлаждения температуры воздуха удовлетворяет условию $-\dot{T}(t_{Gh})/[T^* - T(t_{Gh})]^2 < \alpha_h h_{\max}$, то кривая толщины при $t = t_{Gh}$ имеет точку перегиба $h(t_{Gh}) = \{h_{\max} - \alpha_h^{-1} \dot{T}(t_{Gh})/[T^* - T(t_{Gh})]^2\}/2$. При нарушении неравенства точка перегиба толщины отсутствует, а кривая $h(t)$ следует скачкообразному изменению своих значений – имеет место быстрое промерзание мелких водоемов. В ином случае существует определенный “инкубационный период” t_{Gh} , в течение которого при понижении температуры воздуха и происходит первичное формирование покрова. В реальных условиях наличие

этого периода обусловлено следующим: на предварительном этапе эволюции покрова образуются отдельные скопления зародышей льда; происходит их агрегация и слипание; акватория района покрывается тонкой пленкой льда, и ее толщина практически не изменяется; а далее следует ускоренный рост толщины до ее предельного значения.

При рассмотрении термической эволюции площади отдельной льдины ее текущий ресурс определяется площадью $A^* - \int_0^{h_{\max}} \int_0^{A^*} n(a, h) adah \equiv A^* - A_\Sigma$, где A^* – площадь района акватории (достоверность подобных положений приведена в [17]). Сообразно (2) для \dot{a} следует

$$\dot{a} = (T - T^*)[\alpha_a \Theta_1(T) + \alpha'_a \Theta_2(T)](A^* - A_\Sigma)a. \quad (3)$$

Представляется естественным определить f_{ah} посредством быстро убывающей по a кривой. Например, гиперболой $C_f(T, h)(a_1 + a)^{-k}$, где первый сомножитель отличен от нуля только для $h = h_1$, а $k > 2$ – некоторое число. Функция $C_f(T, h)$ определяется из условия, что плотность числа льдин образованных при формировании покрова или расставших льдин определяется выражением $I = \int_0^{h_{\max}} \int_0^{A^*} f_{ah} dadh$. В первом случае разумно полагать пропорциональность I площади воды на акватории $A^* - A_\Sigma$, а во втором – текущей площади тонкого льда A_1 . В обоих случаях интенсивность процессов определяется охлаждением $T^* - T$ надледного слоя воздуха. Поэтому $I = (T^* - T)[C(A^* - A)\Theta_1(T) + C'A_1\Theta_2(T)]$, где C и C' неотрицательные коэффициенты. Поскольку $a_1 \ll A^*$, то

$$\begin{aligned}C_f(T, h) &\approx (T^* - T)[C(A^* - A_\Sigma)\Theta_1(T) + \\ &+ C'A_1\Theta_2(T)](k-1)a_1^{k-1}\delta_{h, h_1},\end{aligned}\quad (4)$$

где δ_{h, h_1} – символ Кронекера. При записи (4) полагается, что в произвольный момент времени совокупность отдельных образований льда может быть однозначно упорядочена согласно сформированной на основании выборки двумерной таблице $\Omega = \{(a, h): 0 \leq a \leq A^*, 0 \leq h \leq h_{\max}\}$ размеров площадей и толщин. При условии, что площадь результата агрегации не превышает площадь района A^* , он (результат) представляет собой элемент таблицы. Поэтому здесь так называемый коагуляционный член [4] принимает вид

$$\begin{aligned}Q_{ah} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ah}} \int \int \beta(ah - a'h, a'h) n_{a-a', (ah-a')/(a-a')} n_{a', h'} \times \\ &\times da'dh' - n_{ah} \int_{\Omega} \int \beta(ah, a'h) n_{a', h'} da'dh',\end{aligned}$$

где $\Omega_{ah} = \{(a', h'): 0 \leq a' \leq a, 0 \leq h' \leq h\}$; $\beta(z, y)$ – ядро кинетического уравнения, которое представляет собой симметричную функцию. При его записи учитывается тот факт, что обычно агрегирование формализуется в терминах объемов или масс, а не в терминах площадей отдельных льдин. Согласно первому члену, предлагаемый механизм агрегации состоит в следующем: площадь результата агрегации равна сумме площадей льдин, а толщина пересчитывается – сумма объемов исходных льдин делится на суммарную площадь.

Предполагается, что результат дробления льда имеет толщину исходной льдины. Модификация R_{ah} в кинетическом уравнении Мелзака [2] принимает вид

$$R_{ah} = \int_a^{A^*} \gamma(a', a, h) n_{a', h} da' - a^{-1} n_{a, h} \int_0^a \gamma(a, a', h) da',$$

где $\gamma(a', a, h)$ – вероятность образования льдин площади a при дроблении льдин площади $a' > a$. Нормирование $\gamma(a', a, h)$ выполняется таким образом, что интеграл $P_{ah} = a^{-1} \int_0^a \gamma(a, a', h) da'$ равен вероятности распада льдины площади a в единицу времени.

Поскольку рассматривается полный цикл эволюции покрова, то начальное распределение полагается равным нулю. Границные условия естественным образом следуют из (2) и (3): отсутствие потоков числа льдин на крайних границах градаций размеров льдин и толщин. Таким образом, цикл эволюции покрова рассматривается в рамках закрытой для потоков вещества системы.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЛЩИН ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Для районов открытого моря уравнение распределения толщин льда $A_h \equiv A(x, y, t, h)$ получается умножением (1) на a и последующим по ней интегрированием

$$\begin{aligned} \partial A_h / \partial t + \partial u_i A_h / \partial x_i + \partial \dot{h} A_h / \partial h &= \\ &= (T^* - T) f_{Ah} + D \partial^2 A_h / \partial h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Ah} &= (\alpha_a A_h + \alpha_{ah} \delta_{h, h1}) (A^* - A_\Sigma) \Theta_1(T) + \\ &+ [\alpha'_a (A^* - A_\Sigma) A_h + \alpha'_{ah} A_h \delta_{h, h1}] \Theta_2(T). \end{aligned} \quad (5)$$

$$A_\Sigma = \int_0^{h_{\max}} A_h dh$$

Начальные и граничные условия для (5) принимают вид

$$A_h(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad \dot{h} A_h|_{h=0, h_{\max}} = 0. \quad (6)$$

В прибрежных районах различают льды его открытой части A_h и льды припая $A_h^{(B)}$, обломки которых при весеннем термическом разрушении и механическом дроблении выносятся в открытую часть и переходят в категорию льдов открытого моря. Для учета этого обстоятельства в правую часть уравнения (5) следует добавить член, который отражает прирост площадей различных толщин льда открытого моря за счет выноса обломков припая. Соответствующим образом площади припая убывают на эту величину. Указанный член пропорционален текущей площади припая $A_h^{(B)}$, т.е. его можно записать в виде $b_h(T) A_h^{(B)}$, где коэффициент пропорциональности зависит от температуры воздуха и толщины льда: дробление тонкого льда выше дробления толстого льда. Для formalизации отмеченных особенностей дробления можно ограничиться линейным представлением

$$b_h(T) = [b_a(T - T_B^*) - b_h h] \Theta_2(T),$$

где b_a, b_h – неотрицательные параметры дробления припая. Таким образом, в прибрежных районах динамика площадей льда может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \partial A_h / \partial t + \partial \dot{h} A_h / \partial h &= \\ &= (T^* - T) f_{Ah} + D \partial^2 A_h / \partial h^2 + b_h(T) A_h^{(B)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \partial A_h^{(B)} / \partial t + \partial \dot{h} A_h^{(B)} / \partial h &= (T_B^* - T) f_{Ah} + \\ &+ D \partial^2 A_h^{(B)} / \partial h^2 - b_h(T) A_h^{(B)} \end{aligned}$$

где в выражении для f_{Ah} из (5) A_Σ определяется соотношением $A_\Sigma = \int_0^{h_{\max}} (A_h + A_h^{(B)}) dh$. Адекватность моделей (5) и (7) реальным наблюдениям и оценка их параметров выполняется на основании серии вычислительных экспериментов.

Если припай на этапе формирования и его зрелого состояния занимает основную часть акватории района (относительно закрытые прибрежные районы и небольшие озера), то на этом этапе его суммарная площадь определяется интегралом по h второго уравнения (7)

$$\begin{aligned} A_\Sigma^{(B)}(t) &= \\ &= A^* \left\{ 1 - \frac{\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_1}{\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_1 \exp[(\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_1)(T_B^* - \bar{T})t]} \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{T} = \frac{1}{t} \int_0^t T dt$ – текущая средняя температура воздуха в прибрежном районе акватории. Кривая $A_\Sigma^{(B)}(t)$ также как и толщина, при $\dot{T}(t_{GA})/[T_B^* - T(t_{GA})]^2 < \alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_1$ имеет точку перегиб

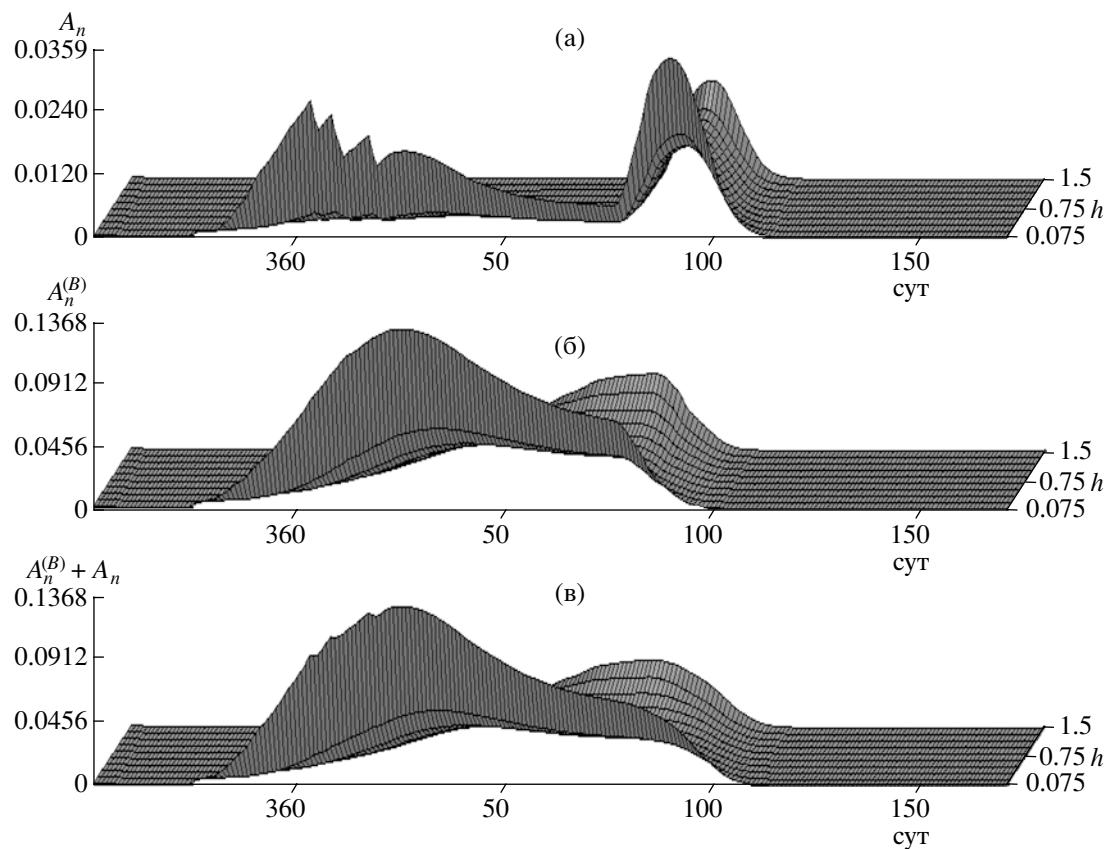


Рис. 2. Распределения толщин ледяного покрова на акватории зал. Петра Великого (а – открытой части, б – припая, в – совокупное распределение).

$A_{\Sigma}^{(B)}(t_{GA}) = \{A^* - \alpha_a^{-1} \alpha_{ah} h_1 - \alpha_a^{-1} \dot{T}(t_{GA}) / [T_B^* - T(t_{GA})]^2\}/2$. При нарушении неравенства точка перегиба $A_{\Sigma}^{(B)}$ отсутствует, что соответствует быстрому покрытию площади акватории прибрежного района тонкой пленкой льда. При выполнении неравенства существует определенный период t_{GA} , в течение которого при понижении температуры воздуха формируется первичный покров.

Детальные особенности эволюции покрова в отдельных районах моря могут быть получены при анализе изменений A_h и $A_h^{(B)}$ в этих районах. В частности, на основании изучения распределений на рис. 2 (временная ось – текущие суткам года, а соответствующие величины нормированы на площадь открытого района моря) можно оценить интенсивность разрушения припая в зал. Петра Великого. Анализ показывает, что при весеннем таянии покрова отмечается рост площадей льда его открытых участков. Этот рост обусловлен выносом сюда обломков льдов припая. Указанные факты хорошо согласуются с натурными наблюдениями [9, 18].

Поскольку (7) воспроизводит реальные процессы разлома припая, то предлагаемый аппарат

может быть использован для соответствующих прогнозов, что для покрова Японского моря является весьма актуальной задачей: при разломе припая происходит вынос их отдельных частей в открытое море с находящимися на них многочисленными рыбаками. И здесь имеют место проблемы спасения жизни людей.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Оценивание параметров и проверка адекватности модели выполнялись на основании ряда вычислительных экспериментов. В каждом из них был организован поиск экстремума функционала, который характеризует меру несовпадения между собой наблюдаемых декадных распределений толщин льда и рассчитанных по (5)–(7) соответствующих распределений. Выборка декадных распределений толщин льда по площадям покрова формировалась на основании частот совместной встречаемости площадей и толщин льда различных градаций. Для этого использовалась исходная совокупность многолетних наблюдений сплошенностии и толщины.

Для оценивания адекватности моделей (5) и (7) их прообразам использовались различные мето-

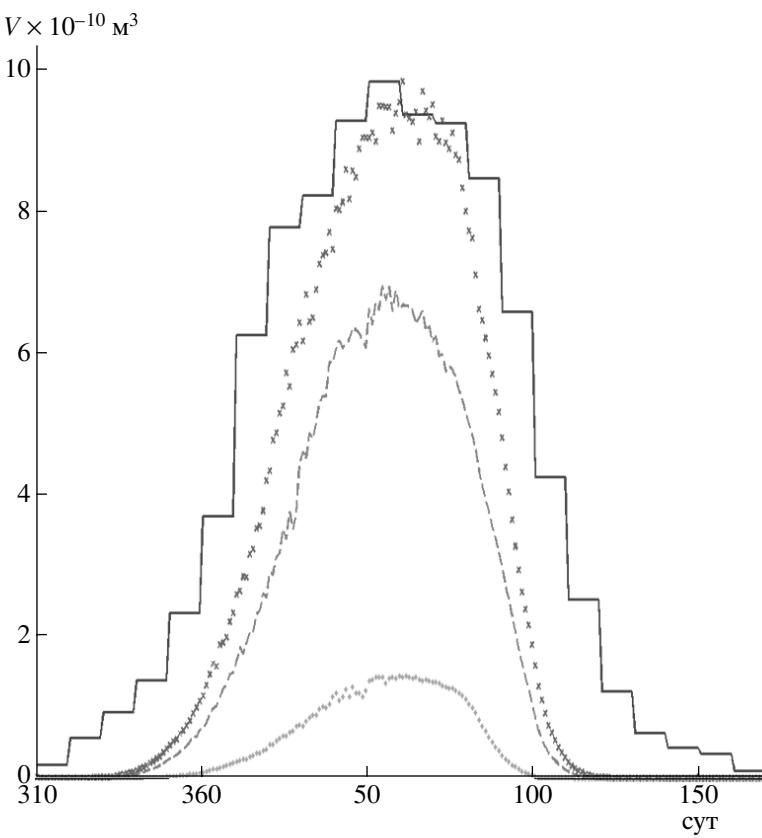


Рис. 3. Динамика объемов льда Японского моря при изменении температуры воздуха. Скорость изменения объема льда – сплошная линия, расчет по модели – крест, изменение объема льда при повышении температуры на 1°C – штриховая линия, на 5°C – точечная.

дики. В частности, искомые параметры оценивались на основании одной части выборки (наблюдения с 1961 по 1986 г.), а для тестирования адекватности использовалась ее другая часть (наблюдения с 1987 по 1989 г.). В качестве меры адекватности модельного и наблюдаемого значения суммарной площади льда в d -й декаде Y -го года выступало принятное в практике исследований морского льда соотношение [7]

$$P_{d,Y} = \frac{m_{d,Y}}{n_{d,Y}} 100\%,$$

где $m_{d,Y}$ – число оправдавшихся прогнозов суммарной площади льда; $n_{d,Y}$ – общее число прогнозов, которое можно оценить при наличии фактического материала. Значения $P_{d,Y}$ не ниже 68%, что указывает на соответствие модели рассматриваемому процессу.

Выполненные расчеты показывают, что численные оценки параметров определяются интервалами: $\hat{T}_B^* = -(6.3 \pm 0.8)^\circ\text{C}$; $\hat{T}^* = -(7.6 \pm 0.9)^\circ\text{C}$; $\hat{\alpha}_h = (2.842 \pm 0.209)10^{-3}$; $\hat{\alpha}'_h = (8.051 \pm 1.137)10^{-3}$; $\hat{\alpha}_h A^* = (2.486 \pm 0.175)10^{-2}$; $\hat{\alpha}'_h A^* = (5.980 \pm$

$\pm 0.186)10^{-2}$; $\alpha_{ah} A^* = (1.843 \pm 0.162)10^{-3}$; $\hat{\alpha}'_{ah} A^* = (1.473 \pm 0.125)10^{-3}$; $\hat{D} = (1.310 \pm 0.021)10^{-3}$; $\hat{b}_{ah}^{(T)} = (8.740 \pm 1.096)10^{-3}$; $\hat{b}_{ah}^{(h)} = (2.185 \pm 0.046)10^{-3}$. Размерность α_h и α'_h – $(\text{м}^\circ\text{C} \text{сут})^{-1}$; для удобства записи оценки параметров α_a , α'_a , α_{ah} , α'_{ah} , приводятся в масштабе площади открытого района и их размерность $(\text{м}^2 \circ\text{C} \text{сут})^{-1}$; D – $\text{м}^2/\text{сут}$; $b_{ah}^{(T)}$ – $(\circ\text{C} \text{сут})^{-1}$; $b_{ah}^{(h)}$ – $(\text{м} \text{сут})^{-1}$. Согласно оценкам, мера интенсивности термического разрушения покрова $\hat{\alpha}'_h$ почти в три раза выше интенсивности формирования $\hat{\alpha}_h$. Данное положение соответствует результатам статистического анализа.

Поскольку установлена адекватность модели, то ее (модель) можно использовать для проведения прогностических экспериментов, направленных на изучение последствий воздействия на ледяной покров Японского моря возможных климатических изменений. При современном темпе выброса в атмосферу диоксида углерода CO_2 антропогенного происхождения вероятность таких изменений достаточно высока. Весьма вероятное

повышение температуры обусловлено существованием так называемого “парникового эффекта” Земли: коротковолновое излучение Солнца нагревает Землю, а ее излучение лежит в области более длинных волн. Поэтому увеличение количества CO_2 значительно ограничивает выход собственного излучения Земли в космос и способствует повышению температуры. Так согласно приведенным в [11] результатам математического моделирования системы атмосфера-океан, при удвоении концентрации CO_2 в атмосфере ее современная средняя температура повысится с -19.2°C до -17.54°C . При этом уровень атмосферных осадков увеличится с 2.04 до 2.15 мм сут. Интерес к данной проблеме объясняется необходимостью количественных оценок антропогенного воздействия промышленных и производственных предприятий на окружающую среду для проведения экологических экспертиз. Кроме того, эти прогнозы полезны для комплексной оценки возможного состояния климатической системы.

Расчеты выполнялись при том же ветровом режиме 2-м надледного слоя воздуха, что был использован для оценки адекватности модели. В качестве вектора параметров модели выступали его оценки. Температура воздуха изменялась в сторону ее увеличения с шагом 0.5°C . Результаты расчетов в форме графиков изменения общих объемов льда приведены на рис. 3. Масштаб измерений объемов льда – 10^{10} м^3 . Согласно этим результатам, при повышении температуры на 1°C общие потери объемов льда составляют $1.695 \times 10^{12} \text{ м}^3$ (19% современного уровня), а при повышении на 5°C – $6.092 \times 10^{12} \text{ м}^3$ (69% современного уровня). Чтобы реально представить эти огромные объемы, выражим их через объем покрова площади района крытого моря метровой толщины. В первом случае суммарные потери составляют объемы льда на акватории 249 таких районов, в во втором случае – это объемы льда на акватории 826 районов.

Полученные результаты дают грубое представление о возможных последствиях климатических изменений, так как при глобальном потеплении увеличится количество осадков и изменится солевой режим моря, что повлияет на условия начала формирования ледяного покрова.

ВЫВОДЫ

Полученные результаты основываются на том, что при адаптации морской воды к термическому и ветровому воздействию формируется промежуточная среда (морской лед), динамика параметров состояний которой определяется набором лимитирующих факторов. В частности, рост толщины льда и снега приводит к уменьшению потока тепла через лед. В дальнейшем этот поток выходит на уровень потока тепла из воды в лед. Миграция изо льда в воду рассола (жидкой

фазы с высокой концентрацией солей) также приводит к снижению потока тепла через лед, осолонению подледных вод и повышению плотности морской воды. Поэтому они трансформируются в лед при более низких температурах чем та, которую имеет уже сформированный слой льда. При этом осолонение воды приводит к ее конвективному перемешиванию: на смену уже охлажденных и более соленых вод поднимаются более теплые глубинные воды, увеличивающие поток тепла к нижней поверхности льда. Сочетание этих и ряда других процессов ограничивает нарастание толщины льда.

Построенная кинетическая модель эволюции ледяного покрова используется как промежуточное звено для построения модели распределения толщин. Однако представляется перспективным ее использование для детального изучения эволюции покрова замерзающих морей.

Подрисуночные подписи к статье Четырбоцкого

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппель И.Л., Гудкович З.М. Численное моделирование и прогноз эволюции ледяного покрова арктических морей в период таяния. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. 144 с.
2. Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 283 с.
3. Ивченко В.О., Хейсин Д.Е. Определение внутренних напряжений в ледяном покрове, возникающих при дрейфе льда // Проблемы Арктики и Антарктики. 1974. Вып. 43. С. 84–89.
4. Лушиков А.А., Пискунов В.Н. Коагуляция в присутствии внешних источников // Докл. АН СССР, 1976. Т. 231. С. 1403–1406.
5. Масловский М.И. Математическое моделирование короткопериодного ветрового дрейфа и перераспределения морского льда различной сплошности(на примере Южного океана) // Тр. ААНИИ. 1982. Т. 387. С. 116–136.
6. Международная символика для морских ледовых карт и номенклатура морских льдов. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 56 с.
7. Наставление по службе прогнозов. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. Раздел 3. 144с.
8. Овсиенко С.Н. О численном моделировании дрейфа льда // Изв. АН СССР. Сер. физ. атмосферы и океана. 1976. Вып. 12. № 11. С. 1201–120.
9. Плотников В.В. Изменчивость ледовых условий Дальневосточных морей России и их прогноз. Владивосток: Дальнавтуз, 2002. 172 с.
10. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.
11. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002. 320 с.

12. Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов (математические модели). Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 272 с.
13. Федоров К.Н., Гинзбург А.И. Приповерхностный слой океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 303 с.
14. Четырбоцкий А.Н. Идентификация моделей вертикального распределения плотности океанских водных масс // Информатика и моделирование в океанологических исследованиях. Владивосток: Дальнаука, 1999. С. 131–143.
15. Четырбоцкий А.Н. Локальная эволюция толщины ледяного покрова водных поверхностей // Тр. ТОВМИ. 2001. Вып.23. С.117–123
16. Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря : исходные данные и процедуры восстановления пропущенных значений // Электронный журнал “Исследовано в России”, 2003. № 7. С. 88–93. <http://zhurnal.ape.relatives2003007.pdf>
17. Четырбоцкий А.Н., Лукянчук И.В., Руднев В.С. Кинетика островкового роста анодно-искровых покрытий // Журн. физ. химии. 2004. Т. 78. № 3. С. 536–539.
18. Якунин Л.П. Ледовые исследования на дальневосточных морях // Проблемы Арктики и Антарктики. 1979. Вып. 77. С. 102–107.
19. Chetyrbotsky A.N. Parametrical model for vertical distribution of water mass density // Proc. of the Pasific Asia Offshore Mechanics Sympo. 1996. P. 33–36.
20. Chetyrbotsky A.N. Local evolution of thickness of an ice cover of water tables // The ACSYS Decade and Beyond. St. Peterburg: AARI of Roshydromet, 2003. P 160–161.